Examenskurs Mathe

7. März 2016

Zuerst Grundlegendes

- Rechnen mit Matrizen
- Lineare Gleichungssysteme
- Die zu einer Matrix gehörende lineare Abbildung

1 Produkt aus Matrix und Spalte

Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sei K ein Körper[1] $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots)$, und sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standard-Basis des K^n

$$(e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}).$$

Ferner sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n} \; \Big(= K^{(m \times n)} = M(m \times n, K)\Big)$$

---

[1] Körper:
$K \neq \emptyset$
$+ : K \times K \to K, \; (a, b) \mapsto a + b$
$\cdot : K \times K \to K, \; (a, b) \mapsto a \cdot b$

und

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_1 1 \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

seien die Spalten von A. Man schreibt dann auch $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

1.1

Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ ist

$$\begin{aligned} A \cdot x &= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 & \ldots & a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & \ldots & a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= x_1 \cdot a_1 + \ldots + x_n \cdot a_n \\ &= x_1 \cdot \text{1-te Spalte von } A + \ldots + x_n \cdot n\text{-te Spalte von } A \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für jedes $j \in < 1, \ldots, n >$:

$$\begin{aligned} A \cdot e_j &= j\text{-te Spalte von } A \\ &= a_j \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned}
\{A \cdot x \mid x \in K^n\} &= \left\{ A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \dots, x_n \in K \right\} \\
&\underset{1.1}{=} \{x_1 \cdot a_1 + \ldots + x_n \cdot a_n \mid x_1, \dots, x_n \in K\} \\
&= K \cdot a_1 + \ldots + K \cdot a_n \\
&=< a_1, \dots, a_n > \ \text{(andere Schreibweise)} \\
&= [a_1, \dots, a_n] \\
&= span\{a_1, \dots, a_n\} \\
&= \ \text{Spaltenraum von } A
\end{aligned}$$

$\{A \cdot x \mid x \in K^n\}$ ist daher ein Untervektorraum (UVR) des K^m, und es ist

$$dim\{A \cdot x \mid x \in K^n\} = Rang(A).$$

Tripel $(V, +, \cdot)$ K (Vektorraum)

Abelsche Gruppe:	K-Vektorraum :	$V \neq \emptyset$
• assoziativ		$+ : V \times V \to V,\ (v, w) \mapsto v + w$
• kommutativ		$\cdot\ : K \times V \to V,\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$
• inverses Element existiert		
• neutrales Element existiert		

UVR U von V (Untervektorraum)
$U \subset V$ (Teilmenge)
1. $(0 \in U \Leftrightarrow) U \neq \emptyset$
2. $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$
3. $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$

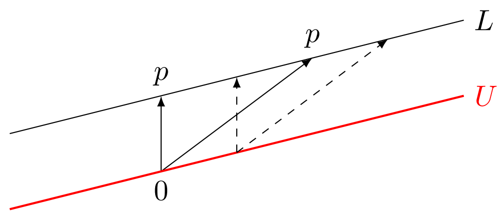
$K^{m \times n}$ VR? $\to$ ja
dim? $\to 6$ $(m \cdot n = 2 \cdot 3 = 6)$

Basis des VR

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{pmatrix}$$

L ist affiner Unterraum von $V : L \subseteq V$.
L ist affiner Unterraum von V, wenn es ein $p \in V$ und einen Untervektorraum (UVR) U von V gibt, so dass $L = p + U = \{p + u \mid u \in U\}$ gilt.



1.3

Nun sei noch $b \in K^m$ beliebig aber fest.

$$L := \{x \in K^n \mid A \cdot x = b\}$$
$$L_h := \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0\}$$

a) Behauptung: L_h ist UVR des K^n
Beweis:

$$A \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in L_h$$
$$u_1, u_2 \in L_h \Rightarrow A \cdot u_1 = 0 \text{ und } A \cdot u_2 = 0$$
$$\Rightarrow A \cdot (u_1 + u_2) = A \cdot u_1 + A \cdot u_2 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u_1 + u_2 \in L_h$$
$$u \in L_h, \lambda \in K \Rightarrow A \cdot (\lambda \cdot u) = \lambda \cdot A \cdot u = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda \cdot u \in L_h$$

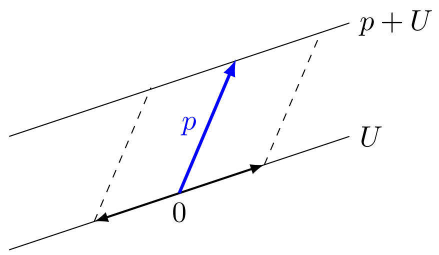
b) Behauptung: $L \neq \emptyset \Leftrightarrow Rang(a_1, \ldots, a_n, b) = Rang(a_1, \ldots, a_n)$.
Beweis:

$$\begin{aligned}
L \neq \emptyset \Leftrightarrow\ & \text{Es gibt } x \in K^n \text{ mit } A \cdot x = b. \\
\Leftrightarrow\ & \text{Es gibt } x_1, \ldots, x_n \in K \text{ mit } b = x_1 \cdot a_1 + \ldots + x_n \cdot a_n \\
\Leftrightarrow\ & b \in \{A \cdot x \mid x \in K^n\} \\
\overset{1.2}{\Leftrightarrow}\ & b \in K \cdot a_1 + \ldots + K \cdot a_n \\
\Leftrightarrow\ & K \cdot a_1 + \ldots + K \cdot a_n + K \cdot b = K \cdot a_1 + \ldots + K \cdot a_n \\
\Leftrightarrow\ & dim(K \cdot a_1 + \ldots + K \cdot a_n + K \cdot b) = dim(K \cdot a_1 + \ldots + K \cdot a_n) \\
& \text{Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren} \\
\Leftrightarrow\ & Rang(a_1, \ldots, a_n, b) = Rang(a_1, \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

c) Wenn $L \neq \emptyset$ ist, gilt für jedes $p \in L$

$$L = p + L_h = \{p + u \mid u \in L_h\}$$

L ist also ein affiner UR des K^n, und L_h ist sein Richtungsraum.



Beweis:
Sei $p \in L$ beliebig und $L \neq \emptyset$. Dann ist $A \cdot p = b$. Zu zeigen $L = p + L_h$

„ $\Leftarrow$ “: $\left.\begin{array}{r} x \in L \Rightarrow A \cdot x = b \\ \text{außerdem: } p \in L \Rightarrow A \cdot p = b \end{array}\right\} A \cdot (x - p) = A \cdot x - A \cdot p = b - b = 0$

$\Rightarrow x - p \in L_h$

$\Rightarrow$ Es gibt $u \in L_h$ mit $x - p = u$

$\Rightarrow x = p + (x - p) \in p + L_h$

$\Rightarrow x = p + U \in p + L_h$

„ $\Rightarrow$ “: $x \in p + L_h \Rightarrow$ Es gibt $u \in L_h$ mit $x = p + u$

Man erhält

$A \cdot x = A \cdot (p + u) = A \cdot p + A \cdot u \overset{p \in L}{=} b + 0 = b,$

also $x \in L$.

1.4

Die Abbildung $l_A : K^n \to K^m$, $l_A(x) = A \cdot x$ für jedes $x \in K^n$ nennt man die zu A gehörige lineare Abbildung. l_A ist lineare denn für alle $x, y \in K^n$ und jedes $\lambda \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} l_A(x + y) &= A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = l_A(x) + l_A(y) \\ l_A(\lambda \cdot x) &= A \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot A \cdot x = \lambda \cdot l_A(x) \\ Bild(l_A) &= \{l_A(x) \mid x \in K^n\} \\ &= \{A \cdot x \mid x \in K^n\} \\ &= K \cdot a_1 + \ldots + K \cdot a_n \\ &= \text{ Spaltenraum von } A \end{aligned}$$

$Bild(l_A)$ ist folglich ein UVR des K^m und es ist $dim(Bild(l_A)) = Rang(A)$.

$$\begin{aligned} Kern(l_A) &= \{x \in K^n \mid l_A(x) = 0\} \\ &= \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0\} \\ &= L_h \end{aligned}$$

$Kern(l_A)$ ist folglich ein UVR des K^n und es ist $dim(Kern(l_A)) = dim(L_h) = n - Rang(A)$, denn die Dimensionsformel für lineare Abbildungen, angewandt auf $l_A : K^n \to K^m$ liefert

$$\begin{aligned} n &= dim(K^n) \\ &= dim(Kern(l_A)) + dim(Bild(l_A)) \\ &= dim(Kern(l_A)) + Rang(A). \end{aligned}$$

Bezogen auf 1.3 erhält man:
Wenn $L \neq \emptyset$ ist, ist L ein affiner UR des K^n, L_h ist sein Richtungsraum und es ist $dim(L) = dim(L_h) = n - Rang(A)$.

$V, W,\ f : V \to W$
$dim(V) < \infty$
Dimensionsformel für lineare Abhängigkeit: $dim(V) = dim(Kern(f)) + dim(Bild(f))$

$A \in K^{m \times n}$
$l_A : K^n \to K^m$
$l_A(x) = A(x)$ (linear abhängig)

$$\begin{aligned} \text{linear: } & V, W\ K\text{-VR} \\ & f : V \to W \\ & f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \\ & f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \end{aligned}$$

Anwendung:

Frage: Ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$ linear?

Antwort: Ja, denn für jedes $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1.5

Sei $f : K^n \to K^m$ eine Abbildung. Dann gilt:
Behauptung:
f linear $\Leftrightarrow$ Es gibt $A \in K^{m \times n}$ mit $f(x) = A \cdot x$ für jedes $x \in K^n$. (d. h. mit $f = l_A$)
A ist dabei eindeutig bestimmt und zwar ist $A = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ = Matrix mit den

Spalten $f(e_1), \ldots, f(e_n)$.
<u>Beweis:</u>

„ $\Leftarrow$ ": schon gezeigt (1.4)

„ $\Rightarrow$ ": Sei f linear.

Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ beliebig, so ist $x = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdots e_n$.

Da f linear ist, erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n) \\ &\underset{f \text{ linear}}{=} x_1 \cdot f(e_1) + \ldots + x_n \cdot f(e_n) \\ &\underset{1.1}{=} (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \cdot x \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit:
Seien $A, B \in K^{m \times n}$, und sei $A \cdot x = f(x) = B \cdot x$ für jedes $x \in K^n$. Man erhält $A = B$, denn für jedes $j \in \{a, \ldots, n\}$ ist

$$j\text{-te Spalte von } A = A \cdot e_j = f(e_j) = B \cdot e_j = j\text{-te Spalte von } B.$$

<u>Beispiel:</u> (Zur Praxis)
Gleichungssystem

$$(*) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 3 \end{cases}$$

$$(*_h) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

Lösungsmenge	L	L_h
Zugehörige Matrix	$A = \left(\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 4 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right)$	$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
Elementare Zeilenumf.	$\left(\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$\downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Zugehöriges LGS	$(**) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$	$(**_h) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$

Es gilt:

1. Lösungsmenge von $(**)$ ist Lösungsmenge von $(*)$
   Lösungsmenge von $(*_h)$ ist Lösungsmenge von $(**_h)$
2. $x_2,\ x_4,\ x_5$ sind die freien, x_1 und x_3 die gebundenen Variablen.
3. Sei W der von den Spalten von A erzeugte UVR des $\mathbb{R}^3$. Dann ist auch
   $W = Bild(l_A)$
   $dim(W) = Rang(A) = 2$.
   Da x_1 und x_3 die gebundenen Variablen sind, bilden die erste und die dritte Spalte von A eine Basis von W. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ ist also eine Basis von W.
4. Eine Basis von $L_h = kern(l_{A_h})$ erhält man wie folgt:
   $dim(L_h) = 5 - Rang(A) = 5 - 2 = 3$
   Bestimme $x_1,\ x_3$ bzw. $y_1,\ y_3$ bzw. $z_1,\ z_3$ so, dass $\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ z_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Lösungen von $(**_h)$ sind. Man erhält $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das ist eine Basis die gesucht ist.

5. Eine Lösung von $(*)$ erhält man indem man $u_1,\ u_3$ so bestimmt, dass $\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine

   Lösung von $(**)$ ist. Man erhält hier: $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. $L = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $y \in Bild(l_{A^2}) \Rightarrow$ Es gibt $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} y &= l_{A^2}(x) \\ &= A^2 \cdot x \\ &= A \cdot (A \cdot x) = l_A \cdot A \cdot x \\ &\in Bild(l_A) \end{aligned}$$

1.6 Aufgabe 1.12

Gegeben $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ mit $x_p = \mathbb{R}^6$.

a) Bestimme der *Rang* von A sowie die Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$

b) Bestimme $b \in \mathbb{R}^4$ so, dass x_p Lösung von $A \cdot x = b$ ist und gebe die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$ an. x_p Lösung von $A \cdot x = b \Leftrightarrow A \cdot x_p = b$

Lösungsmenge von $A \cdot x = b = x_p +$ Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$

1.7 Aufgabe 1.23

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$$

a) Zeige, dass U ein UVR des $\mathbb{R}^n$ ist, und bestimme seine Dimension.
   Lösung:
   U ist die Menge aller Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$x_1 + \ldots + x_n = 0,$$

also des Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$A = (1, \dots, 1) = 0 \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

U ist folglich ein UVR des $\mathbb{R}^n$, und es ist

$$dim(U) = n - Rang(A) = n - 1$$

b) Sei U' die Lösungsmenge einer (weiteren) homogenen linearen Gleichung

$$a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n = 0$$

Bestimme $dim(U \cap U')$.
Lösung:
$U \cap U'$ ist der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rl} x_1 + \ldots + x_n & = 0 \\ a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n & = 0 \end{array} \quad \text{mit der Koeffizientenmatrix } A = \begin{pmatrix} 1 \ldots 1 \\ a_1 \ldots a_n \end{pmatrix}.$$

$$dim(U \cap U') = n - Rang(A) = \begin{cases} n-1, \text{ wenn } \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ n-2, \text{ sonst} \end{cases}$$

1.8 Aufgabe 3.21

Behauptung: Für jedes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $Rang(A^2) \leq Rang(A)$
Beweis: Zu zeigen: $dim(Bild(l_{A^2})) \leq dim(Bild(l_A))$.
Zeige dazu: $Bild(l_{A^2}) \leq Bild(l_A)$
$b \in Bild(l_{A^2}) \Rightarrow$ Es gibt a mit $b = l_A(a) = A^2 \cdot a = A \cdot (A \cdot a) = l_A \cdot (A \cdot a) = Bild(l_a)$

1.9 5.39

V sei ein endlichdimensionaler VR, $\varphi : V \to V$ sei linear. Zeige:

a) Ist $Kern(\varphi) \cap Bild(\varphi) = \{0\}$, so ist $V = Kern(\varphi) \oplus Bild(\varphi)$
Noch zu zeigen: $V = Kern(\varphi) \oplus Bild(\varphi)$
$dim(Kern(\varphi) + Bild(\varphi)) =$
$= dim(Kern(\varphi)) + dim(Bild(\varphi)) - dim(Kern(\varphi) \cap Bild(\varphi)) =$
$= dim(Kern(\varphi)) + dim(Bild(\varphi)) = dim(V)$

b) Ist $\varphi \circ \varphi = \varphi$, so ist $Bild(\varphi)$ die Menge der Fixpunkte von φ, und es gilt
$V = Kern(\varphi) \cap Bild(\varphi)$
Behauptung: $Bild(\varphi) = Fix(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = v\}$

Beweis:

„ $\Leftarrow$ “ $w \in Bild(\varphi) \Rightarrow$ Es gibt $v \in V$ mit $w = \varphi(v)$.

Man erhält $\varphi(w) = \varphi(\varphi(v)) \overset{\varphi\circ\varphi=\varphi}{=} \varphi(v) = w$ also $w \in Fix(\varphi)$

„ $\Rightarrow$ “ $v \in Fix(\varphi) \Rightarrow v = \varphi(v) \Rightarrow v \in Bild(\varphi)$

Nach a) ist nur noch $Kern(\varphi) \cap Bild(\varphi) = \{0\}$ zu zeigen.

$v \in Kern(\varphi) \cap Bild(\varphi) \Rightarrow \varphi(v) = 0$ und $v \in Bild(\varphi) = Fix(\varphi)$

$\Rightarrow \varphi(v) = 0$ und $\varphi(v) = v \Rightarrow v = 0$

2 Eigenwerte, Eigenräume und Diagonalisierbarkeit

Sei K ein Körper, V ein $K-$Vektorraum, und sei $f : V \to V$ linear. Bezeichnet. Für $\lambda \in K$ sei $Eig(f, \lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v\}$

2.1 Definition:

$\lambda \in k$ heißt Eigenwert von $f \Leftrightarrow$ es gibt $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda \cdot v$
Jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda \cdot v$ heißt Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.
Ist λ Eigenwert von f, so nennt man $Eig(f, \lambda) : \{v \in V \mid f(v) = \lambda \cdot v\}$ den Eigenraum von f zum Eigenwert λ.

2.2 Bemerkung:

$Eig(f, 0) = \{v \in V \mid f(v) = 0 \cdot v\} = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = Kern(f)$
$Eig(f, 1) = \{v \in V \mid f(v) = 1 \cdot v\} = \{v \in V \mid f(v) = v\} =$ Menge der Fixpunkte von f.

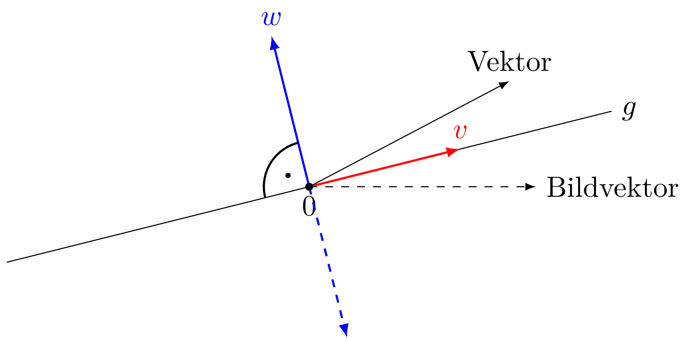
Behauptung: Für jedes $\lambda \in K$ ist $Eig(f, \lambda)$ ein UVR von V.

Beweis:

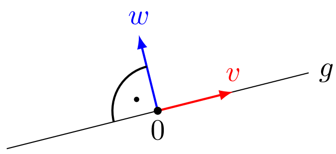
- $f(0) = 0 = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in Eig(f, \lambda)$
-
$$\begin{aligned} v,\ w \in Eig(f, \lambda) &\Rightarrow f(v) = \lambda \cdot v \text{ und } f(w) = \lambda \cdot w \\ &\underset{f \text{ linear}}{\Rightarrow} f(v + w) = f(v) + f(w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w = \lambda \cdot (v + w) \\ &\Rightarrow v + w \in Eig(f, \lambda) \end{aligned}$$
-
$$\begin{aligned} v \in Eig(f, \lambda),\ \alpha \in K &\Rightarrow f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v) = \alpha \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (\alpha \cdot v) \\ &\Rightarrow \alpha \cdot v \in Eig(f, \lambda) \end{aligned}$$

2.3 Beispiele:

1. Sei $g \in \mathbb{R}^2$ eine Gerade durch 0.
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung an g (f ist linear)
   $$\left.\begin{aligned} f(v) &= v = 1 \cdot v \\ f(w) &= -w = (-1) \cdot w \end{aligned}\right\} \text{1 und } -1 \text{ sind Eigenwerte von } f.$$
   $Eig(f, 1) = g,\ Eig(f, -1)$ ist die zu g senkrechte Gerade durch 0.

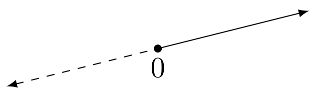


2. Sei $g \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade durch 0.
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei die Orthogonalprojektion auf g.
   f ist linear



   $f(v) = v = 1 \cdot v$
   $f(w) = 0 = 0 \cdot w$
   1 und 0 sind daher Eigenwerte von f.
   $Eig(f, 1) = g,\ Eig(f, 0) = Kern(f)$ ist die Gerade durch 0 senkrecht zu g.

3. Sei $\alpha \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha < 2 \cdot \pi$
   $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei die Drehung um 0 gegen den Uhrzeigersinn, Drehwinkel α.



   f_α hat Eigenwerte $\Leftrightarrow \alpha = \pi$
   -1 ist Eigenwert von f_π und es ist $Eig(f_\pi, -1) = \mathbb{R}^2$

4. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei definiert durch $f(x) = x^T$ für jedes $x \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
   <u>Behauptung:</u> f ist linear
   <u>Beweis:</u>

$f(x+y) = (x+y)^T = x^T + y^T = f(x) + f(y)$
$f(\alpha \cdot x) = (\alpha \cdot x)^T = \alpha \cdot x^T = \alpha \cdot f(x)$
1 ist Eigenwert von f und es ist:

$$\begin{aligned} Eig(f,1) &= \{x \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid x^T = x\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$dim(Eig(f,1)) = 3$
-1 ist ebenfalls Eigenwert von f und es ist:

$$\begin{aligned} Eig(f,-1) & \left\{ x \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| f(x) = (-1) \cdot x \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| x^T = -1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$dim(Eig(f,-1)) = 1$

5. Sei $\mathbb{R}[x] := \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-VR aller Polynome vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten.
   $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ sei definiert durch $f(p) = p + p''$. f ist linear.
   Behauptung: 1 ist Eigenwert von f
   Beweis:

$$\begin{aligned} Eig(f,1) &= \{p \in \mathbb{R}[x] \mid f(p) = p\} \\ &= \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p + p'' = p\} \\ &= \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p'' = 0\} \\ &= \{a_1 \cdot x + a_0 \mid a_1, a_0 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

2.4 Bemerkung:

Sei $f : V \to V$ linear und sei $\lambda \in K$.

$$\begin{aligned} Eig(f,0) &= \{v \in V \mid f(v) = 0 \cdot v\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) = 0\} \\ &= Kern(f) \end{aligned}$$

3 Übertragung auf Matrizen

Nun sei $A \in K^{n\times n}$ und $l_A : K^n \to K^n,\ l_A(x) = A \cdot x$.

3.1 Definition:

$\lambda \in K$ heißt Eigenwert von $A :\Leftrightarrow \lambda$ ist Eigenwert zu l_A
Jeder Eigenvektor von l_A zum Eigenwert λ heißt Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.
$Eig(A, \lambda) = Eig(l_A, \lambda)$

3.2 Bemerkung:

1. $x \in K^n$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ
$\Leftrightarrow x \neq 0$ und $l_A(x) = \lambda \cdot x$
$\Leftrightarrow x \neq 0$ und $A \cdot x = \lambda \cdot x$.

2.
$$\begin{aligned} Eig(A, \lambda) &= Eig(l_A, \lambda) \\ &= \{x \in K^n \mid l_A(x) = \lambda \cdot x\} \\ &= \{x \in K^n \mid A \cdot x = \lambda \cdot x\} \\ &= \{x \in K^n \mid (A - \lambda \cdot E) \cdot x = 0\} \\ &= \{x \in K^n \mid (\lambda \cdot E - A) \cdot x = 0\} \\ &= \text{ Lösungsraum des homogenen linearen GLS mit der Koeffizientenmatrix} \\ &\quad\ A - \lambda \cdot E \end{aligned}$$

Folglich ist

$$dim(Eig(A, \lambda)) = n - Rang(A - \lambda \cdot E) = n - Rang(\lambda \cdot E - A)$$

3. $\lambda \in K$ ist Eigenwert von A
$\Leftrightarrow$ Es gibt $x \in K^n$ mit $x \neq 0$ und $A \cdot x = \lambda \cdot x$ (Geometrische Bedingung)
$\Leftrightarrow$ Es gibt $x \in K^n$ mit $x \neq 0$ und $(A - \lambda \cdot E) \cdot x = 0$
$\Leftrightarrow det(A - \lambda \cdot E) = 0$
$\Leftrightarrow det(\lambda \cdot E - A) = 0$ (Algebraische Bedingung)

3.3 Bemerkung:

Sei $A \in K^{n\times n},\ x \in K^n,\ \lambda \in K$. Ist $A \cdot x = \lambda \cdot x$,
so ist für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ \ A^k \cdot x = \lambda^k \cdot x$

Beweis:
Vollständige Induktion

$k = 1$ ✓
$k \to k+1:$

$$\begin{aligned} A^{k+1} \cdot x &= A \cdot (A^k \cdot x) = A \cdot (\lambda^k \cdot x) \\ &= \lambda^k \cdot (A \cdot x) = \lambda^k \cdot (\lambda \cdot x) \\ &= \lambda^{k+1} \cdot x \end{aligned}$$

Folgerung:
Ist λ Eigenwert von A und ist x Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}:$
λ^k ist Eigenwert von A^k und
x ist Eigenvektor von A^k zum Eigenwert λ^k.

3.4 Aufgabe 2.1 b

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeige: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von A.

$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert 7.

3.5 Aufgabe 2.33

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und sei $A^{-1} = A \quad (\Rightarrow A^2 = E)$

a) Zeige: Ist λ Eigenwert von A, so ist $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.
Lösung:
λ Eigenwert von $A \Rightarrow$ Es gibt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ und $A \cdot x = \lambda \cdot x$.
Man erhält

$$A^2 \cdot x = A \cdot (A \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot A \cdot x = \lambda \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot x$$

Wegen $x \neq 0$ ist λ^2 Eigenwert von $A^2 = E$
Außerdem $A^{-1} = A \Rightarrow A^2 = E$
λ Eigenwert von $A \Rightarrow \lambda^2$ Eigenwert von $A^2 = E \Rightarrow \lambda^2 = 1$

b) Zeige: $(A+E)\cdot(A-E)=0$
$(A+E)\cdot(A-E)=A^2-A\cdot E+E\cdot A-E^2=A^2-E^2=0$

c) Zeige: Ist 1 kein Eigenwert von A, so ist $A=-E$.
Lösung:
1 kein Eigenwert von A $\Rightarrow det(A-E)\neq 0$
$\Rightarrow A-E$ ist invertierbar.
Multiplikation von $(A+E)\cdot(A-E)=0$ mit $(A-E)^{-1}$ von rechts liefert $A+E=0$, also $A=-E$.

3.6 Bemerkung:

1. $f: V\to V$ linear
λ Eigenwert (EW) von $f \Leftrightarrow$ Es gibt $v\in V$ mit $v\neq 0$ und $f(v)=\lambda\cdot v$

2. $A\in K^{n\times n}$
λ EW von $A \Leftrightarrow$ Es gibt $x\in K^n$ mit $x\neq 0$ und $A\cdot x=\lambda\cdot x$ (geom. Bedingung)
$$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow det(\lambda\cdot E-A)=0 \quad (\Leftrightarrow det(A-\lambda\cdot E)=0)\\ \Leftrightarrow Rang(\lambda\cdot E-A)<n \quad (\Leftrightarrow Rang(A-\lambda\cdot E)<n)\end{array}\right\}\text{(alg. Bedingung)}$$

3. $det(X\cdot E-A)=X^n+a_{n-1}\cdot X^{n-1}+\ldots+a_1\cdot X+a_0$ mit $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\in K$, wobei gilt:
$a_0=(-1)^n\cdot det(A)$ und $a_{n-1}=-Spur(A)$
Folgerung: A hat höchstens n Eigenwerte.

4. Ist A eine Dreiecksmatrix, so sind die Elemente in der Hauptdiagonalen von A die Eigenwerte von A.

5. Sei $s\in K$.
Wenn die Summe der Elemente in jeder Zeile von A gleich s ist, ist s Eigenwert von A und $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in K^n$ ist ein zugehöriger Eigenvektor.
$$\left(A\cdot\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\\vdots\\s\end{pmatrix}=s\cdot\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$$

6. $x\in K^n$ ist Eigenvektor von $A \Leftrightarrow x\neq 0$ und $A\cdot x$ ist Vielfaches von x.

7. 0 ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow det(A)=0$
$det(A)=det(A-0\cdot E)$
$\Leftrightarrow Rang(A)=n$
$\Leftrightarrow$ die Spalten von A sind linear abhängig
$\Leftrightarrow A$ ist nicht invertierbar.

8. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A sind linear unabhängig. Wenn $K=\mathbb{R}$ ist und A symmetrisch, so stehen sie sogar senkrecht aufeinander.

9. Frage: Wenn A' aus A durch elementare Umformungen entsteht, hat dann A' die gleichen Eigenwerte wie A?

   Antwort: Nein. Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

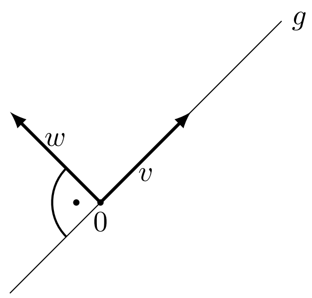
   Eigenwerte von $A : 0, 2$
   Eigenwerte von $A' : 0, 1$

3.7 Definition Diagonalisierbarkeit:

Sei V ein unendlichdimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ linear.
f heißt diagonalisierbar:
$\Leftrightarrow$ V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von f.
$\Leftrightarrow$ Mindestens eine der darstellenden Matrizen von f ist eine Diagonalmatrix.

3.8 Beispiele:

1. Sei $g \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade durch 0 und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung an g bzw. die Othogonalprojektion auf g. Sowohl die Spiegelung an g als auch die orthogonale Projektion auf g sind diagonalisierbar, denn mit v, w wie in folgender Skizze ist (v, w) eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren.



2. $f : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}, \ f(x) = X^T$ für jedes $x \in \mathbb{R}^{2\times2}$ ist diagonalisierbar. Zeige dazu:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

   ist eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times2}$ aus Eigenvektoren von f.
   Dass die angegebenen Matrizen Eigenvektoren von f sind, haben wir schon gezeigt.
   Noch zu zeigen: Sie sind linear unabhängig. Aus

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   mit $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_2 - \lambda_4 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

3.9 Bemerkung:

Sei $A \in K^{n \times n}$, A diagonalisierbar

$\Leftrightarrow$ K^n besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von A.

$\Leftrightarrow$ Es gibt $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$, so dass gilt:

a) $det(X \cdot E - A) = (X - \lambda_1)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_r)^{d_r}$

b) Für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ ist $dim(Eig(A, \lambda_i)) = d_i$ (geom. Vielfachheit = alg. Vielfachheit)

$\Leftrightarrow$ Es gibt invertierbare $S \in K^{n \times n}$, so dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist.
So ein S erhält man wie folgt:
Man bestimmt die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von A und für jedes i eine Basis von $Eig(A, \lambda_i)$. Schreibt man die so gewonnenen Basiselemente der Reihe nach als Spalten einer Matrix S, so ist S invertierbar, und es ist

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\} d_1 \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\} d_r \end{matrix}$$

3.10 Bemerkung:

Sei $A \in K^{n \times n}$:

1. Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.
   Folgerung: Hat A n verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar.

2. Ist $K = \mathbb{R}$ und A symmetrisch, so gilt:

   a) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A stehen aufeinander senkrecht.

   b) A ist diagonalisierbar.

   c) Bestimmt man bei der Ermittlung von S wie oben für jeden Eigenraum von A nicht nur eine Basis, sondern sogar eine Orthonormalbasis, so erhält man eine

$$\text{orthogonale Basis } S \text{ mit } S^{-1} \cdot A \cdot S = S^T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_r & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

3.11 Definition:

Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$. S heißt orthogonal:
$\Leftrightarrow S^T \cdot S = E$
$\Leftrightarrow$ Die Spalten von S bilden eine ONB des $\mathbb{R}^n$

3.12 Bemerkung:

Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. Sei S orthogonal $\Leftrightarrow$ die Spalten von S bilden eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^n$.
2. S orthogonal $\Rightarrow det(S) = 1$ oder $det(S) = -1$
   „$\Leftarrow$" falsch, Beispiel $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. S orthogonal $\Rightarrow S$ invertierbar und $S^{-1} = S^T$

3.13 Aufgabe 6.20

Bestimme $S_{32}, S_{13}, S_{23}, S_{33} \in \mathbb{R}$ so, dass $S = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & S_{13} \\ 1 & 2 & S_{23} \\ 2 & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Lösung:

S orthogonal $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ S_{32} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 + 2 + 2 \cdot S_{32} = 0 \Rightarrow S_{32} = -2$

S orthogonal $\Rightarrow \begin{pmatrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{33} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{33} \end{pmatrix}$ ist Vielfaches von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

3.14 Bemerkung 2.30 b:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar.

1. Ist $A^3 = E$, so ist $A = E$.

2. (2.30 b) Hat A nur nicht negative Eigenwerte, so gibt es $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A_0^2 = A$

<u>Beweis:</u>
Wenn A zunächst eine Diagonalmatrix ist, gelten 1. und 2.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^3 \end{pmatrix}$$

$A^3 = E \Rightarrow \lambda_i^3 = 1$ für jedes $i \Rightarrow \lambda_i = 1$ für jedes $i \Rightarrow A = E$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}}_{A_0}{}^2$$

Nun sei A diagonalisierbar.
Dazu gibt es ein inverses $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D, \text{ also mit } A = S \cdot D \cdot S^{-1}.$$

Zu 1.: $E = A^3 = S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} = S \cdot D^3 \cdot S^{-1}$
$\Rightarrow D^3 = S^{-1} \cdot E \cdot S = E$
$\Rightarrow D = E$
$\Rightarrow A = S \cdot D \cdot S^{-1} = E$

Zu 2.:

$$\begin{aligned} A &= S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \\ &= \underbrace{S \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot S^{-1}}_{A_0} \cdot \underbrace{S \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot S^{-1}}_{A_0} \end{aligned}$$

3.15 Definition:

Seien $A, B \in K^{n\times n}$.
A und B heißen ähnlich, wenn es ein inverses $S \in K^{n\times n}$ gibt mit $S^{-1} \cdot A \cdot S = B$.

$$\begin{aligned} det(B) &= det(S^{-1} \cdot A \cdot S) \\ &= det(S^{-1}) \cdot det(A) \cdot det(S) \\ &= det(S^{-1}) \cdot det(S) \cdot det(A) \\ &= det(S^{-1} \cdot S) \cdot det(A) \\ &= det(A) \end{aligned}$$

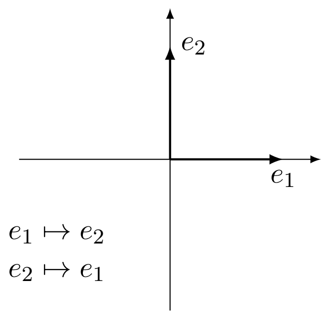
3.16 Bemerkung:

A und B ähnlich

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} Rang(A) & = & Rang(B) \\ det(A) & = & det(B) \\ Spur(A) & = & Spur(B) \\ \text{char. Polynom von } A & = & \text{char. Polynom von } B \end{array}$$

3.17 Bemerkung 2.20:

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
Frage: Gilt: $A \cdot B$ diagonalisierbar $\Rightarrow A$ und B diagonalisierbar?
Antwort: Nein! Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um 0 gegen den Uhrzeigersinn, Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$. Dann hat man:
also $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar,
$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ aber schon.



Frage: Gilt: A, B diagonalisierbar $\Rightarrow A \cdot B$ diagonalisierbar?
Antwort: Nein! Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A und B sind diagonalisierbar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

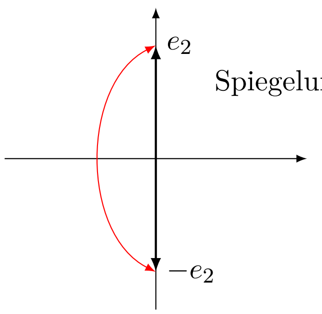
ist nicht diagonalisierbar. (Hat keinen reellen Eigenwert.)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzw. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

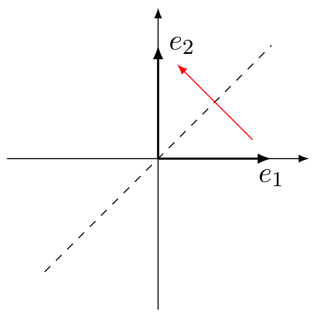
f und g sind linear; folglich ist für jedes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } A = (f(e_1), f(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } B = (g(e_1), g(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
(f \circ g)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f\left(g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (A \cdot B) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$f \circ g$ ist also die Drehung um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn.



Spiegelung an der x-Achse



Spiegelung an $y = x$

Sei $(x-3) \cdot (x-4)^2$ das charakteristische Polynom einer reellen symmetrischen Matrix A. Dann gilt:

1. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

2. 3 und 4 sind Eigenwerte von A

3. $g := Eig(A, 3)$ ist eine Gerade und $H := Eig(A, 4)$ ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch 0.

4. $g \perp H$

5. Für jedes $a \in g \setminus \{0\}$ und jedes $b \in H \setminus \{0\}$ ist $a \times b \in H \setminus \{0\}$, ist also auch ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 4.

6. $\left(\frac{1}{\|a\|} \cdot a, \frac{1}{\|b\|} \cdot b, \frac{1}{\|a \times b\|} \cdot (a \times b)\right)$ ist eine Orthonormalbasis (ONB) des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

7. Die Matrix S mit diesen Spalten ist orthogonal, und es ist $S^T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$

8. $det(A) = 3 \cdot 4 \cdot 4$

3.18 Satz (Prinzip der linearen Fortsetzung)

Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume, $(b_1, \ldots, b_n)$ sei eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_n \in W$ seien beliebig. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$f : V \to W \text{ mit } \begin{array}{c} f(b_1) = w_1 \\ \vdots \\ f(b_n) = w_n \end{array}$$

Für dieses f gilt:
f injektiv $\Leftrightarrow w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig
f surjektiv $\Leftrightarrow w_1, \ldots, w_n$ erzeugen W.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[\text{linear}]{f} & W \\ b_1 & \mapsto & w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_n & \mapsto & w_n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Basis} & & \text{beliebig} \end{array}$$

4 Darstellende Matrizen

Sei V, W endlichdimensional. K-Vektorraum, $f : V \to W$ sei linear. Wenn $(v_1, \ldots, v_m)$ bzw. $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von V bzw. W ist, so kann man wie folgt eine Matrix $M \in K^{n \times m}$ bestimmen:

1. Spalte von $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, wenn $f(v_1) = \alpha_1 \cdot w_1 + \ldots + \alpha_n \cdot w_n$.

2. Spalte von $M = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, wenn $f(v_2) = \beta_1 \cdot w_1 + \ldots + \beta_n \cdot w_n$.

3. Spalte usw.

Man nennt M die (darstellende) Matrix von f bezüglich $(v_1, \ldots, v_m)$ und $(w_1, \ldots, w_n)$. Wenn $W = V$ (und damit $m = n$) ist, und $(w_1, \ldots, w_n) = (v_1, \ldots, v_m)$, so nennt man M die (darstellende) Matrix von f bezüglich $(v_1, \ldots, v_m)$.

4.1 Beispiele:

1. Sei $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a+d \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist linear.
   $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ bzw. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bzw. $\mathbb{R}^2$.
   Bestimme eine Matrix M von f bezüglich dieser Basen:

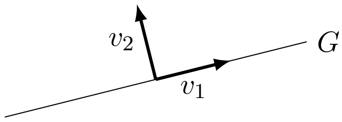
$$\left.\begin{array}{l} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $Pol_n(\mathbb{R}) = \{a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$,
   $f : Pol_3(\mathbb{R}) \to Pol_2(\mathbb{R})$, $f(p(x)) = p'(x) - (x+1) \cdot p''(x)$ ist linear.
   Bestimme die Matrix M von f bezüglich der Basen $(1, x, x^2, x^3)$ bzw. $(1, x, x^2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ f(x) = 1 - (x+1) \cdot 0 = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ f(x^2) = 2 \cdot x - (x+1) \cdot 2 = -2 = -2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ f(x^3) = 3 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 6 \cdot x = -3 \cdot x^2 - 6 \cdot x = 0 \cdot 1 + (-6) \cdot x + (-3) \cdot x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade mit $0 \in G$.
   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzw. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung an bzw. die Orthogonalprojektion auf G.



Dann ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ die Matrix von f bezüglich (v_1, v_2) und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Matrix von g bezüglich (v_1, v_2).

4. $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ f(x) = x^T$ für jedes $x \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist linear. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis vom $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
   Bestimme die Matrize M von f bezüglich dieser Basis.

$$\left.\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5 Folgen (reeller Zahlen)

Im Folgenden seien stets $n_0, n, N \in \mathbb{N}$ und $\epsilon \in \mathbb{R}$. Ordnet man jedem $n \geq n_0$ genau ein $a_n \in \mathbb{R}$ zu, so erhält man die Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$

Definition:

Sei $(a_n)_{n\geq n_0}$ eine Folge und sei $a \in \mathbb{R}$. $(a_n)_{n\geq n_0}$ heißt konvergent gegen a $:\Leftrightarrow$ Für jedes offene Intervall I mit $a \in I$ gilt:
Es gibt ein (von I abhängiges) $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in I$ für jedes $n \geq N$. a heißt dann Grenzwert von $(a_n)_{n\geq n_0}$.
$(a_n)_{n\geq n_0}$ heißt konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $(a_n)_{n\geq n_0}$ konvergent gegen a ist.

Bemerkung:

$(a_n)_{n\geq n_0}$ ist konvergent gegen a $\Leftrightarrow$ Für jedes $\epsilon > 0$ gilt:
Es gibt ein (von ϵ abhängiges) $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$ für jedes $n \geq N$.
$\Leftrightarrow$ Für jedes $\epsilon > 0$ gilt:
Es gibt ein (von ϵ abhängiges) $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ für jedes $n \geq N$

Beispiele:

1. (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$
   $(a_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent gegen 0, denn:
   Ist $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es nach dem archimedischen Axiom ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\epsilon}$
   Für jedes $n \geq N$ gilt dann $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$

2. $a_n = \frac{(\sin(n))^3 - 3\cdot\cos(n)}{\sqrt{n}}$ für $n \geq 1$
   $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left|(\sin(n))^3 - 3\cdot\cos(n)\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\left|\sin(n)^3\right| + 3\cdot|\cos(n)|\right) \leq \frac{4}{\sqrt{n}}$
   Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{4}{\epsilon} < n$. Dann gilt jedes $n \geq N$:
   $|a_n - 0| = |a_n| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} \leq \frac{4}{\sqrt{N}} < \epsilon$

3. $a_n = (-1)^n,\ n \geq 0$
   Behauptung: $(a_n)_{n\geq n_0}$ ist nicht konvergent.
   Beweis: Annahme: a ist Grenzwert.
   1. Fall: $a \geq 0$ Dann ist für jedes n
      $a_{2n+1} = -1 \notin]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[$
   2. Fall: $a < 0$ analog.

Sprechweise:
Sei $A(n)$ für $n \geq n_0$ eine Aussage. Wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $A(n)$ ist wahr für jedes $n \geq n_0$ gibt, so sagt man $A(n)$ ist wahr für fast alle n.
Bemerkung:

1. Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ hat genau einen Grenzwert. Bezeichnung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
   Annahme: $(a_n)_{n\geq n_0}$ ist konvergent gegen a und gegen b, und es ist $a \neq b$.

2. Sei $(a_n)_{n\geq n_0}$ konvergent gegen a und sei $c < a$ beliebig. Dann ist $a_n > c$ für fast alle n.

3. Sei $c, d \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\geq n_0}$ eine konvergente Folge. Aus $c \leq a_n \leq d$ für jedes $n \geq n_0$ folgt dann $c \leq \lim a_n \leq d$
   Sei $a = \lim a_n$.
   Frage: Gilt diese Aussage auch für $<$ statt $\leq$?
   Antwort: Nein. Beispiel: $0 < \frac{1}{n} < 2$ für $n \geq 1$

4. Schrankenlemma (Sandwich-Lemma)
   Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen. (a_n) und (b_n) seien konvergent und es sei $\lim a_n = \lim b_n = c$. Wenn dann $a_n \leq c_n \leq b_n$ für jedes n gilt, ist auch (c_n) konvergent gegen c.

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen. Dann ist auch $(a_n \overset{\pm}{\cdot} b_n)$ konvergent und es ist $\lim (a_n \overset{\pm}{\cdot} b_n) = \lim a_n \overset{\pm}{\cdot} \lim b_n$
Ist $b := \lim b_n \neq 0$ gibt es N mit $b_n \neq 0$ für jedes $n \geq N$, und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq N}$ ist konvergent gegen $\frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.
Folgerungen:

1. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ und jedes $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq 1$ ist $\left(\frac{c}{h^l}\right)_{n\geq 1}$ konvergent gegen 0.

2. Für jedes $l \in \mathbb{N}$ ist $\left(\frac{1}{n+l}\right)_{n\geq 1}$ konvergent gegen 0.

3. $a_n = \frac{n^3+2\cdot n^2+3}{4\cdot n^3+5\cdot n+6},\ n \geq 0$
   $$a_n = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}}$$
   $$\left.\begin{array}{r} \text{Zähler } \to 1 \\ \text{Nenner } \to 4 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n) \to \frac{1}{4}$$

4. $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2},\ n \geq 1$
   (a_n) ist konvergent gegen 0.
   Frage: Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}$ ebenfalls konvergent gegen 0?
   Antwort: Nein, denn für jedes $n \geq 1$ ist
   $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{n+1}\cdot(n+1) = (n+1)\cdot\frac{1}{2n} \geq n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

5. $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^5$ ist konvergent gegen 1.
   Frage: Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ konvergent gegen 1?
   Antwort: Nein, denn für jedes $n \geq 1$ ist $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2$

Bemerkung: (a_n) konvergent gegen $a \Leftrightarrow (a_{2k})$ und (a_{2k+1}) konvergent gegen a.
Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}$.

1. $c \in \mathbb{R}$ heißt größtes Element (Maximum) von $M :\Leftrightarrow$
   a) Für jedes $x \in M$ ist $x \leq c$
   b) $c \in M$

   Kleinstes Element analog.

2. $s \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke von $M :\Leftrightarrow$ Für jedes $x \in M$ ist $x \leq s$. Untere Schranke analog.

3. M heißt nach oben beschränkt $:\Leftrightarrow$ M besitzt eine obere Schranke. Nach unten beschränkt analog.

4. M heißt beschränkt $:\Leftrightarrow$ M ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.

Bemerkung: Ist M nach oben beschränkt und nicht leer, so besitzt M nach dem Vollständigkeitsaxiom eine kleinste obere Schranke. Diese ist eindeutig bestimmt und heißt Supremum von M $(sup(M))$.
Bemerkung: Wenn $M \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, ist es eindeutig bestimmt. Bezeichnung $max(M)$. Es ist dann $sup(M) = max(M)$. Für inf analog.
Beispiel: $M := \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Wegen $0 \leq x \leq 1$ für jedes $x \in M$ ist M beschränkt. M hat kein Maximum. $sup(M) = 1$. 0 ist Minimum von M, also

$inf(M) = min(M) = 0$.

Definition:

Eine Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ heißt $\begin{cases} \text{nach oben beschränkt} \\ \text{nach unten beschränkt} \\ \text{beschränkt} \end{cases}$ $:\Leftrightarrow \{a_n \mid n > n_0\}$ ist $\begin{cases} \text{nach oben beschränkt} \\ \text{nach unten beschränkt} \\ \text{beschränkt} \end{cases}$

Bemerkung: (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt.

„$\Leftarrow$" ist falsch: Beispiel: $a_n := (-1)^n$.

Definition:

Eine Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ heißt monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$ $:\Leftrightarrow$ für jedes $n \geq n_0$ ist $\begin{cases} a_{n+1} \geq a_n \\ a_{n+1} \leq a_n \end{cases}$

Beispiele:

1. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (a_n^3 + 1)$ für $n \geq 1$. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^3 + 1)$.
   Dann ist $f(a_n) = a_{n+1}$ für jedes $n \geq 1$, f ist monoton wachsend.
   Behauptung: $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend
   Beweis: Vollständige Induktion:
   $a_1 = 0 \leq \frac{1}{3} = a_2$
   $n \to n+1 : a_1 \leq a_{n+1}$
   $\underset{\text{wachsend}}{\overset{f \text{ monoton}}{\Rightarrow}} f(a_n) \leq f(a_{n+1})$
   $\Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$

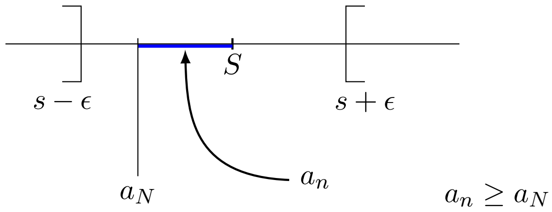
2. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (a_n^3 + 1) \end{cases}$ für $n > 1$
   Behauptung: $(a_n)_{n>1}$ ist monoton fallend.
   Beweis: Vollständige Induktion: f wie bei 1.
   $a_2 = \frac{2}{3} < 1 = a_1$
   $n \to n+1 : a_{n+1} \leq a_n$
   $\underset{\text{wachsend}}{\overset{f \text{ monoton}}{\Rightarrow}} f(a_{n+1}) \leq f(a_n)$
   $\Rightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}$

5.1 Monotoniekriterium

1. Eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ ist konvergent und es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup\{a_n \mid n \geq n_0\}$

2. Eine monoton fallende nach unten beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ ist konvergent und es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = inf\{a_n \mid n \geq n_0\}$

Beweis: Zu 1.: Sei $s = sup\{a_n \mid n \geq n_0\}$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig.



Anwendung: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ erklärt durch $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12} \end{cases}$ für $n \geq 1$.

Zeige, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist und bestimme den Grenzwert. Wenn man schon wüsste, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, könnte man den Grenzwert a wie folgt bestimmen.

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{a_n + 12} \\ \Big\downarrow & & \downarrow \\ & & \underbrace{a}_{a+12} \\ & & \downarrow \\ a & = & \sqrt{a+12} \end{array}$$

Man erhält: $a^2 = a + 12$, also $a^2 - a - 12 = 0$, also $(a+3)\cdot(a-4) = 0$, also $a = -3$ oder $a = 4$. Wegen $a_n \geq 0$ für jedes $n \geq 1$ erhält man $a = 4$.

Behauptung: Für jedes $n \geq 1$ ist $a_n \leq 4$

Beweis: Vollständige Induktion:

$a_1 = 1 \leq 4$ ✓

$n \to n+1 : a_n \leq 4 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12} \leq \sqrt{16} = 4$

Behauptung: $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend.

Beweis: Vollständige Induktion:

$a_1 = 1 \leq \sqrt{13} = a_2$

$n \to n+1 :$

$$\begin{aligned} a_1 \leq a_{n+1} \quad &\Rightarrow \quad a_n + 12 \leq a_{n+1} + 12 \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{a_n + 12} \leq \sqrt{a_{n+1} + 12} \\ &\Rightarrow \quad a_{n+1} \leq a_{n+2} \end{aligned}$$

5.2 Cauchy-Bedingung

Eine Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ genügt der Cauchy-Bedingung, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_k - a_l| < \epsilon$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \geq N$ und $n \geq N$ gilt.

5.3 Cauchy-Kriterium

Eine Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie der Cauchy-Bedingung genügt.

6 Unendliche Reihen

6.1 Definition

Sei $(a_k)_{k\geq n_0}$ eine Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ sei $S_n := \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k$. Man nennt die Folge $(S_n)_n \geq n_0$ die zu $(a_k)_{k\geq n_0}$ gehörige Reihe, und bezeichnet sie mit $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k$. Wenn sie konvergiert bezeichnet man ihren Grenzwert mit $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$. S_n heißt n-te Partialsumme von $(a_k)_{k\geq n_0}$ bzw. von $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k$.

6.2 Wichtige Beispiele

6.2.1 Geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R}$.
<u>Behauptung:</u> Die Reihe $\sum\limits_{k\geq 0} q^k$ ist konvergent $\Leftrightarrow |q| < 1$. Wenn $|q| < 1$, gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} = \frac{1}{1-q}$
<u>Beweis:</u> Für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$

1. Fall: $q = 1$: Dann $S_n = n + 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Man hat also Divergenz.
2. Fall: $q \neq 1$: Dann $(1-q) \cdot S_n = S_n - q \cdot S_n$
   $= 1 + q + q^2 + \ldots + q^k - \left(q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}\right)$
   $= 1 - q^{n+1}$ also $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $n \in \mathbb{N}$.
   (S_n) konvergent $\Leftrightarrow (q^{n+1})$ konvergent $\underset{q\neq 1}{\Leftrightarrow} |q| < 1$.
   Im Fall $|q| < 1$ erhält man $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \lim\limits_{k\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$

6.2.2 Teleskopreihe

<u>Behauptung:</u> $\sum\limits_{k\geq 2} \frac{1}{k\cdot(k-1)}$ ist konvergent un es ist $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k-1)} = 1$
<u>Beweis:</u> $\frac{1}{k\cdot(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
Für $n \geq 2$ ist daher $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\cdot(k-1)} =$
$= \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}$
$(S_n)_{n\geq 2}$ ist konvergent und es ist $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k-1)} = \lim S_n = 1$

6.2.3

Sei $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$.
<u>Behauptung:</u> $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^p}$ ist konvergent.

Beweis: Für $k \geq 2$ ist $k^p \geq k^2 \geq k \cdot (k-1)$ also $0 < \frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k \cdot (k-1)}$
Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist daher $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} = 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} \leq 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k \cdot (k-1)} \leq 2$
$(S_n)_{n \geq 1}$ ist daher nach oben beschränkt. Wegen $\frac{1}{k^p} > 0$ für jedes $k \geq 1$ ist $(S_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend. Nach dem Monotoniekriterium ist $(S_n)_{n \geq 1}$ konvergent.

6.2.4 Harmonische Reihe

Behauptung: Die Reihe $\sum\limits_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ ist divergent.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ sei $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
Annahme: $\sum\limits_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ ist konvergent gegen a. Dann konvergieren $(S_{2n})_{n \geq 1}$ und $(S_n)_{n \geq 1}$ beide gegen a. $(S_{2n} - S_n)_{n \geq 1}$ ist dann konvergent gegen 0.
Es ist aber $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \geq n \cdot \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}$ Widerspruch.

6.2.5

Behauptung: Für jedes $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$ ist $\sum\limits_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$ konvergent.
Beweis: Mit Integralvergleichskriterium (siehe unten).

6.2.6 Alternierende Harmonische Reihe

Behauptung: Die Reihe $\sum\limits_{k \geq 1} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ ist konvergent.
Beweis: Mit Leibniz-Kriterium (siehe unten).

6.2.7 Exponentialreihe

Behauptung: Die Reihe $\sum\limits_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergent. (Siehe unten)
Es ist $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

6.3 Bemerkung

Sei $(a_k)_{k \geq n_0}$ eine Folge, und sei $n_1 \in \mathbb{N},\ n_1 > n_0$.
Dann gilt: $\sum\limits_{k \geq n_0} a_k$ konvergent $\Leftrightarrow \sum\limits_{k \geq n_1} a_k$ konvergent.
Im Konvergenzfall ist $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=n_0}^{n_1 - 1} a_k + \sum\limits_{k=n_1}^{\infty} a_k$

6.4 28 a

Bestimme den Grenzwert der konvergenten Reihe $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{3^{-k}}{(k+1)!}$

$$\sum_{k\geq 0} \frac{3^{-k}}{(k+1)!} = 3\cdot \sum_{k\geq 0} \frac{(\frac{1}{3})^{k+1}}{(k+1)!} \underset{l=k+1}{=} 3\cdot \sum_{l\geq 1} \frac{(\frac{1}{3})^{l}}{l!} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{-k}}{(k+1)!} = 3\cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{3})^{l}}{l!} = 3\cdot \left(\exp\left(\frac{1}{3}\right) - 1\right)$$

6.5 Bemerkung

$\sum\limits_{k\geq n_0} a_k$ konvergent $\Rightarrow (a_k)_{k\geq n_0}$ Nullfolge. „$\Leftarrow$“ falsch. Beispiel: $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k}$

6.6 Anwendung

Untersuche $\sum\limits_{k\geq 1} a_k$ mit $a_k = \frac{k^2+2k+3}{4k+5} \cdot \frac{(k+1)^2}{k^{k+1}}$ auf Konvergenz.

$$a_k = \frac{k^2+2k+3}{4k+5} \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{k^2+2k+3}{4k^2+5k} \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{1+\frac{2}{k}+\frac{3}{k^2}}{4+\frac{5}{k}} \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\cdot e \neq 0$$

$\sum\limits_{k\geq 1} a_k$ ist also divergent.

6.7 Definition

$\sum\limits_{k\geq n_0} a_k$ heißt absolut konvergent $:\Leftrightarrow \sum\limits_{k\geq n_0} |a_k|$ konvergent.

6.8 Bemerkung

$\sum\limits_{k\geq n_0} a_k$ heißt konvergent $\Rightarrow$

1. $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k$ konvergent
2. $\left|\sum\limits_{k\geq n_0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum\limits_{k\geq n_0}^{\infty} |a_k|$

6.9 Vergleichskriterium

6.9.1 Majorantenkriterium

Eine Reihe $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ ist absolut konvergent, wenn es eine konvergente Reihe $\sum\limits_{k\geq n_0} b_k$ gibt, so dass $|a_k| \leq b_k$ für fast alle k gilt.

6.9.2 Minorantenkriterium

Eine Reihe $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k$ ist divergent, wenn es eine divergente Reihe (Minorante) $\sum\limits_{k\geq n_0} b_k$ gibt, so dass $|b_k| \leq a_k$ für fast alle k gilt.

6.10 Anwendung

6.10.1 2.3 a

$\sum\limits_{k\geq 0} \frac{k+4}{k^2-3k+1}$
$\frac{k+4}{k^2+1-3k} \geq \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$ für $k \geq 1$. Da $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ divergent ist, ist die betrachtete Reihe nach dem Minorantenkriterium ebenfalls divergent.

6.10.2 2.4

$\sum\limits_{k\geq 1} \frac{3k^2+1}{k^4+1}$
$\frac{3k^2+1}{k^4+1} \underset{\text{für } k\geq 1}{\leq} \frac{3k^2+3k^2}{k^4} = 6 \cdot \frac{1}{k^2}$. Da $6 \cdot \sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ konvergent ist, ist $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{3k^2+1}{k^4+1}$ nach dem Majorantenkriterium ebenfalls konvergent.

6.10.3 2.6 a

$\sum\limits_{k\geq 1} \frac{2^k}{3^k+4^k}$
$\frac{2^k}{3^k+4^k} \leq \frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$
$\sum\limits_{k\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ konvergent.
$\sum\limits_{k\geq 0} \frac{4^k}{2^k+3^k}$
$\frac{4^k}{2^k+3^k} \geq \frac{4^k}{3^k+3^k} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k$
$\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{k\geq 0} \left(\frac{4}{3}\right)^k$ divergent.
Behauptung: $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent.
Beweis: $k \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ $\quad \sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ divergent.

6.10.4 2.22 und 2.23

$(k^2 \cdot a_k) \stackrel{\text{konvergiert}}{\longrightarrow} c > 0$
Behauptung: $\sum a_k$ ist konvergent.
Beweis: Wegen $(k^2 \cdot a_k) \to c > 0$ ist für fast alle k

$$\left.\begin{array}{l} 0 < k^2 \cdot a_k \leq 2c, \text{ also } 0 < a_k \leq 2c \cdot \frac{1}{k^2} \\ \qquad \sum 2c \cdot \frac{1}{k^2} \text{ ist konvergent} \end{array}\right\} \text{Behauptung.}$$

Behauptung: $(k \cdot a_k) \to c > 0 \Rightarrow \sum a_k$ divergent.
Beweis: Wegen $(k \cdot a_k) \to c$ ist für fast alle k
$k \cdot a_k \geq \frac{c}{2}$, also $a_k \geq \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{k}$
$\sum \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{k}$ ist divergent.

6.11 Quotientenkriterium

1. Eine Reihe $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k$ ist absolut konvergent, wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für jedes $k \geq N$ gilt: $a_k \neq 0$ und $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$
2. Eine Reihe $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k$ ist divergent, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für jedes $k \geq N$ gilt: $a_k \neq 0$ und $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$

6.11.1 Korollar

Sei $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k$ eine Reihe. Wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

1. $a_k \neq 0$ für jedes $k \geq N$
2. Die Folge $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)_{k\geq N}$ ist konvergent,

so ist

$$\sum_{k\geq n_0} a_k \left\{ \begin{array}{c} \text{absolut konvergent} \\ \text{divergent} \end{array} \right\} \text{ wenn } \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases}$$

Im Fall $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$ ist keine Aussage möglich.

6.11.2 Beispiel

$\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ und $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$

6.11.3 Beispiel

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{8^k}{(3k)!} \cdot x^{3k}$?

Für $x = 0$ konvergent.

Sei $x \neq 0$ und $a_k = \frac{8^k \cdot x^{3k}}{(3k)!}$ Dann

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{8^{k+1} \cdot x^{3\cdot(k+1)}}{(3\cdot(k+1))!} \cdot \frac{(3k)!}{8^k \cdot x^{3k}}\right| = \left|\frac{8 \cdot x^{3k+3} \cdot (3k)!}{(3k+3)! \cdot x^{3k}}\right| = \frac{8}{(3k+1)\cdot(3k+2)\cdot(3k+3)} \cdot \left|x^3\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Das Korollar liefert $\sum \frac{8^k}{(3k)!} \cdot x^{3k}$ ist absolut konvergent.

6.12 Wurzelkriterium

Sei $(a_k)_{k\geq n_0}$ eine Folge. Wenn es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ gibt, so dass $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ für fast alle k gilt, so ist $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k$ absolut konvergent.

6.12.1 Korollar

Sei $(a_k)_{k\geq n_0}$ eine Folge. Wenn die Folge $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\geq n_0}$ konvergiert, so gilt:

$$\sum_{k\geq n_0} a_k \begin{Bmatrix} \text{absolut konvergent} \\ \text{divergent} \end{Bmatrix} \text{ wenn } \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases}$$

6.12.2 Anwendung 24

$\sum\limits_{k\geq 1} \frac{2^k}{k^{10}}$, also $a_k = \frac{2^k}{k^{10}}$

$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2}{\left(\sqrt[k]{k}^{10}\right)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1^{10}} = 2 > 1$

<u>Behauptung:</u> Für jedes $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$, jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $\left(k^m \cdot q^k\right)_{k\geq 0}$ eine Nullfolge.

<u>Beweis:</u> Zeige dazu $\sum\limits_{k\geq 0} k^m \cdot q^k$ ist konvergent.

Wurzelkriterium:

$\sqrt[k]{|k^m \cdot q^k|} = \left(\sqrt[k]{k}\right)^m \cdot |q| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |q| < 1$

Quotientenkriterium:

$q = 0$ ✓

$q \neq 0 : k \geq 1 \Rightarrow \left|\frac{(k+1)^m \cdot q^{k+1}}{k^m \cdot q^k}\right| = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^m \cdot |q| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |q| < 1$

6.13 Leibniz-Kriterium

Sei $(a_k)_{k\geq n_0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann gilt:

1. $\sum\limits_{k\geq n_0} (-1)^k \cdot a_k$ ist konvergent.

2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ ist $\left|\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k - \sum\limits_{k=n_0}^{n} (-1)^k \cdot a_k\right| \leq a_{k+1}$

6.13.1 Anwendung 2.30

Bestimme $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2k-1}\right| \leq \frac{1}{2\cdot 10^4}$

Offensichtlich ist $\left(\frac{1}{2k-1}\right)_{k\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge.

Das Leibniz-Kriterium liefert daher: $\left| \quad \right| \leq \frac{1}{2\cdot(n-1)+1} = \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n}$

$n \geq 10^4$ genügt.

6.14 Integralvergleichskriterium

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $f : [n, \infty[\to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für jedes $x \in [n, \infty[$. Dann gilt:

$\sum\limits_{k\geq m} f(k)$ konvergent $\Leftrightarrow \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_m^b f(x)\ dx$ existiert.

$\left(\Leftrightarrow \int\limits_m^\infty f(x)\ dx \text{ existiert}\right)$

6.14.1 Anwendung 2.25

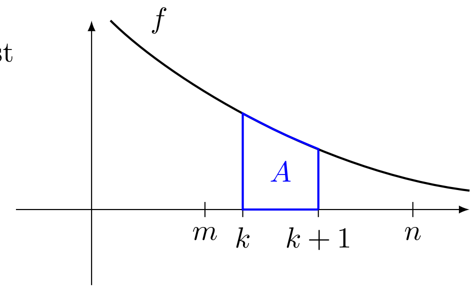
$s \in \mathbb{R},\ s > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^s}$ konvergiert.

Wende das letzte Kriterium an auf $f : [1,\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^s}$

Voraussetzung: Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $f : [m,\infty[\to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für jedes $x \in [m,\infty[$.

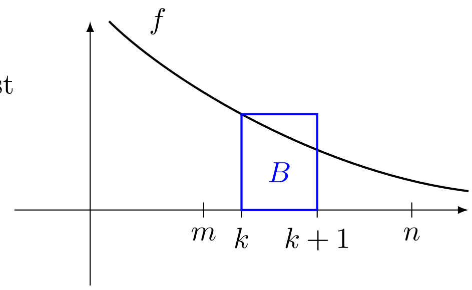
Flächeninhalt von A ist

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)\ dx$$



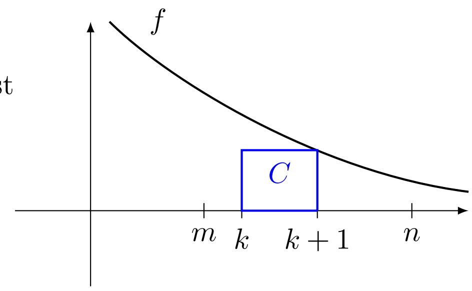
Flächeninhalt von B ist

$$f(k)$$



Flächeninhalt von C ist

$$f(k+1)$$



Anschaulich: $k \geq m \Rightarrow f(k+1) \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)\ dx \leq f(k)$

Sei $k \in \{m,\dots,n-1\}$ beliebig.

Für $x \in [k,k+1]$ gilt dann (f ist monoton fallend): $f(x+1) \leq f(x) \leq f(k)$

Integration liefert:

$\int\limits_k^{k+1} f(k+1)\ dx \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)\ dx \leq \int\limits_k^{k+1} f(k)\ dx$, also

$f(k+1) \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)\ dx \leq f(k)$

Summation liefert:

$\sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k-1) \leq \sum\limits_{k=m}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} f(x)\ dx \leq \sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k)$, also

$\sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k+1) \leq \int\limits_m^n f(x)\ dx \leq \sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k)$, also $(l = k+1)$

$\sum\limits_{l=m+1}^{n} f(l) \leq \int\limits_m^n f(x)\ dx \leq \sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k)$

7 Potenzreihen

Gegeben sei eine Folge $(a_k)_{k\geq n_0}$ und ein $a \in \mathbb{R}$.
Fragestellung: Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $P(x) := \sum\limits_{k\geq n_0} a_k \cdot (x-a)^k$ konvergent?

Wegen $0^k = \begin{cases} 1, \text{ wenn } k = 0 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$ ist $P(a) = \begin{cases} (a_0, a_0, a_0, \ldots), \text{ wenn } n_0 = 0 \\ (0, 0, 0, \ldots), \text{ wenn } n_0 > 0 \end{cases}$

$P(x)$ ist also konvergent für $x = q$. Dieser Fall ist uninteressant, daher im Folgenden: $P(x)$ sei nicht nur für $x = a$ konvergent. Dann hat man die folgenden Möglichkeiten:

1. $P(x)$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergent.
   Dann sagt man: „Die Potenzreihe $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k \cdot (x-a)^k$ hat den Konvergenzradius ∞."
   Und setzt das Konvergenzintervall $I_k = \mathbb{R}$.

2. Es gibt $i \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:
   a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < r$ ist $P(x)$ konvergent.
   b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| > r$ ist $P(x)$ divergent.

   r ist dann eindeutig bestimmt und man sagt: „Die Potenzreihe $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k \cdot (x-a)^k$ hat den Konvergenzradius r." Ferner setzt man hier $I_k =]a-r, a+r[$

7.0.2 5.7

Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen.
Zeige: Konvergenzradius von $\sum\limits_{k\geq 1} a_k \cdot x^k$ ist höchstens 1.

$\sum\limits_{k\geq 1} a_k \cdot 1^k = \sum\limits_{k\geq 1} a_k$ ist aber wegen Voraussetzung divergent.
Annahme Konvergenzradius $r > 1$:
Dann ist $\sum a_k \cdot 1 = \sum a_k$ konvergent. Diese Reihe ist aber divergent, denn wegen $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$ ist $(a_k)_{k\geq 1}$ keine Nullfolge.

7.0.3 5.6 c

Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine monoton fallende Nullfolge, und für jedes $k \geq 1$ sei $a_k \geq \frac{1}{k}$.
Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche $\sum\limits_{k\geq 0} a_k \cdot x^k$ konvergiert.

Wegen $a_k \geq \frac{1}{k}$ für jedes $k \geq 1$ ist $\sum\limits_{k\geq 0} a_k \cdot 1^k = \sum\limits_{k\geq 0} a_k$ divergent (Minorantenkriterium).
Der Konvergenzradius von $\sum\limits_{k\geq 0} a_k \cdot x^k$ ist daher ≤ 1. $\sum\limits_{k\geq 1} a_k \cdot (-1)^k$ ist nach Leibniz-Kriterium konvergent, daher ist der Konvergenzradius von $\sum\limits_{k\geq 0} a_k \cdot x^k \geq 1$. Ergebnis:
Konvergenzradius $= 1$, also $\sum\limits_{k\geq 0} a_k \cdot x^k$ konvergent $\Leftrightarrow x \in [-1, 1[$
Leicht berechnen kann man den Konvergenzradius in folgenden Fällen:

1. Es gibt $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_k \neq 0$ für jedes $k \geq N$ ist, und die Folge $\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)_{k\geq N}$ gegen ein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert.
2. Wenn die Folge $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\geq n_0}$ gegen ein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Dann gilt nämlich:
Konvergenzradius von $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k \cdot (x-a)^k = \begin{cases} \infty, \text{ wenn } s = 0 \\ \frac{1}{s}, \text{ wenn } s \neq 0 \end{cases}$
Betrachte die Potenzreihe $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{3^k} \cdot z^k$ Die hat den Konvergenzradius 3.

Es gilt also $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{3^k} \cdot z^k$ ist $\begin{cases} \text{konvergent, falls } |z| < 3 \\ \text{divergent, falls } |z| > 3 \end{cases}$ also $\sum \frac{1}{3^k} \cdot x^{2k} \begin{cases} \text{konvergent, wenn } |x| < \sqrt{3} \\ \text{divergent, wenn } |x| > \sqrt{3} \end{cases}$,
also Konvergenzradius von $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{3^k} \cdot x^{2k}$ ist $\sqrt{3}$. Das sieht man natürlich leichter über Geometrische Reihe:
$\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{3^k} \cdot x^{2k} = \sum\limits_{k\geq 0} \left(\frac{x^2}{3}\right)^k$ konvergent $\Leftrightarrow \frac{x^2}{3} < 1$

7.1 Satz

1. Die Potenzreihen $\sum\limits_{k\geq 1} k \cdot a_k \cdot (x-a)^{k-1}$, wenn $n_0 = 0$ bzw. $\sum\limits_{k\geq 0} k \cdot a_k \cdot (x-a)^{k-1}$, wenn $n_0 > 0$ und $\sum\limits_{k\geq n_0} \frac{a_k}{k+1} \cdot (x-a)^{k+1}$ haben den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe $\sum\limits_{k\geq n_0} a_k \cdot (x-a)^k$.

2. Die Funktion $f : I_k \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k \cdot (x-a)^k$ ist differenzierbar und für jedes $x \in I_k$ ist $f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x-a)^{k-1}, \text{ wenn } n_0 = 0 \\ \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (x-a)^{k-1}, \text{ wenn } n_0 > 0 \end{cases}$

3. Die Funktion $F : I_k \to \mathbb{R},\ F(x) = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \cdot (x-a)^{k+1}$ ist eine Stammfunktion der Funktion f aus 2.
(Es ist $F(a) = 0$)

7.1.1 5.18

Berechne für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ den Wert der Reihe $\sum\limits_{k \geq 1} k \cdot x^{k-1}$
$\sum\limits_{k \geq 1} k \cdot x^{k-1}$ entsteht aus $\sum\limits_{k \geq 0} x^k$ durch gliedweises differenzieren.
Für $|x| < 1$ ist aber $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Daher ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

7.2 Definition

Sei $D \subset \mathbb{R},\ a \in D$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ beliebig stetig differenzierbar in a. Dann nennt man die Potenzreihe $\sum\limits_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$ die Taylorreihe von f in a. $\left(f^{(0)}(a) = f(a)\right)$

7.2.1 5.21

Gegeben $f :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x)$. Bestimme die Taylorreihe von f zu 2.
Für $x \in]0, \infty[$ gilt:
$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$
$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$
$f^{(5)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$
<u>Vermutung:</u>
$f^{(k)}(x) = (-1)^{(k+1)} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}$
Beweis durch vollständige Induktion.
Daher ist $\ln(2) + \sum\limits_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k \cdot 2^k} \cdot (x-2)^k$ die Taylorreihe von f in 2.

7.3 Satz

Wenn es ein offenes Intervall I mit $a \in I$ gibt, so dass $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-a)^k$ für jedes $x \in I$ gibt, so gilt für jedes $k \geq 0$
$a_k = \frac{f(k)(a)}{k!}$ also $f^{(k)}(a) = k! \cdot a_k$

7.3.1 Alternative Lösung von 5.21

Für jedes $x > 0$ ist $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2-x}{2}\right)}$
Daher ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $\left|\frac{2-x}{2}\right| < 1$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2-x}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \sum (-1)^k \cdot \frac{1}{2^k} \cdot (x-2)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} \cdot (x-2)^k$

ln ist auf $]0,4[$ eine Stammfunktion von $]0,4[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

$x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}\cdot(k+1)} \cdot (x-2)^{k+1}$ ist ebenfalls eine Stammfunktion von $]0,4[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

Es gibt daher $c \in \mathbb{R}$ mit $\ln(x) = c + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}\cdot(k+1)} \cdot (x-2)^{k+1}$

Einsetzen von $x = 2$ liefert $c = \ln(2)$

Für jedes $x \in]0,4[$ ist also

$\ln(x) \underset{k+1=l}{=} \ln(2) + \sum\limits_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \cdot \frac{1}{l\cdot 2^l} \cdot (x-2)^l = \ln(2) + \sum\limits_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \cdot \frac{1}{l\cdot 2^l} \cdot (x-2)^l$

Daher ist für $l \geq 1$

$\ln^{(l)}(2) = l! \cdot (-1)^{l+1} \cdot \frac{1}{l\cdot 2^l} = (-1)^{l+1} \cdot \frac{(l-1)!}{2^l}$

7.3.2 5.25 und 5.26

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}\ dt$

Da der Integrand stetig ist, ist F differenzierbar, und für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist

$F'(x) = e^{-x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot x^{2k}$

$F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!\cdot(2k+1)} \cdot x^{2k+1}$

Man erhält für jedes $k \geq 0$

$F^{(2k)}(0) = 0$

$F^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cdot \frac{1}{k!\cdot(2k+1)} \cdot (2k+1)! = (-1)^k \cdot \frac{(2k)!}{k!}$

$F' = f$:

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-a)^k$

$x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \cdot (x-a)^{k+1}$ und F sind Stammfunktionen von f. Es gibt daher $c \in \mathbb{R}$ mit

$F(x) = c + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \cdot (x-a)^{k+1}$. Einsetzen von $x = a$ liefert $c = F(a)$.

7.4 Taylor-Formel

Sei I aus $\mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $a \in I$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ mit $x \neq a$ ein p_x zwischen a und x mit $p_x \neq a$ und $p_x \neq x$ so dass gilt:

$f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(p_x)}{(k+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$

7.4.1 Anwendung 4.14

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei erklärt durch $f(x) = \sin(x^2)$.

$T_2(x)$ sei das Taylorpolynom 2. Ordnung von f in 0.

Behauptung: Für jedes $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ist $|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{6}$
Beweis:
$f(x) = \sin(x^2)$
$f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$
$f''(x) = -\sin(x^2) \cdot 4x^2 + 2 \cdot \cos(x^2)$
$f'''(x) = -8x^3 \cdot \cos(x^2) - 12x \cdot \sin(x^2)$
Sei $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, also $|x| \leq 1$ Dann gilt:
$|f'''(x)| \leq 8 \cdot |x|^3 + 12 \cdot |x| \leq 1 + 6$ also $\left|\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right| \leq \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{8} \leq \frac{1}{6}$

7.5 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und in jedem Punkt von $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es $p \in]a, b[$ mit $f(b) - f(a) = f'(p) \cdot (b - a)$ also mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(p)$

7.5.1 Anwendung 4.1

Seien $a, b \in \mathbb{R},\ 0 \leq a < b \leq \pi$
Behauptung: $(b - a) \cdot \cos(b) < \sin(b) - \sin(a) < (b - a) \cdot \cos(a)$
Beweis: Sei $f(x) = \sin(x)$
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es $p \in]a, b[$ mit $\sin(b) - \sin(a) = \cos(p) \cdot (b - a)$.
Es ist $\cos(b) < \cos(p) < \cos(a)$, also (wegen $b - a > 0$)
$\cos(b) \cdot (b - a) < \underbrace{\cos(p) \cdot (b - a)}_{\sin(b)-\sin(a)} < \cos(a) \cdot (b - a)$

7.5.2 Zwischenwertsatz für die Praxis

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist jede Zahl, die zwischen zwei Funktionswerten von f liegt, selbst Funktionswert von f.

7.5.3 Präzisere Version des Zwischenwertsatzes für die Praxis

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $c \in \mathbb{R}$.
Wenn $f(a) < c < f(b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, so gibt es x_0 zwischen a und b mit $f(x_0) = c$

7.5.4 Anwendung 3.19

Gegeben sei $f :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ durch $f = \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} = \frac{1}{x \cdot \ln x} + \frac{1}{x}$.
Bestimme $f(]1, \infty[)$
Lösung:

$$x \in]1, \infty[\Rightarrow x > 0 \text{ und } \ln x > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ also: } f(]0, \infty[) \subseteq]0, \infty[$$

Behauptung:	Es gilt „=“
Beweis:	Sei $c \in]0, \infty[$ beliebig.
	Zu zeigen: $c \in f(]1, \infty[)$
	Wegen $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ hat f Funktionswerte $< c$
	Wegen $\lim\limits_{x \searrow \infty} f(x) = \infty$ hat f Funktionswerte $> c$
	Da f stetig auf dem Intervall $]1, \infty[$ ist, ist nach dem Zwischenwertsatz $c \in f(]1, \infty[)$

8 Kegelschnitte

8.1 Vorbereitungen

1. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt affin, wenn es $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $u \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $f(x) = M \cdot x + u$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. M und u sind dabei eindeutig bestimmt.
   f ist die Zusammensetzung der linearen Abbildung l_M und der Translation $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, g(y) = y + u$ für jedes $y \in \mathbb{R}^n$.
   Wenn M invertierbar ist, nennt man f eine Affinität.
   Wenn M orthogonal ist, nennt man f eine Bewegung (Isometrie, Kongruenzabb.).
   Eine Bewegung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist abstandstreu, d. h. $\|f(p) - f(q)\| = \|p - q\|$ für alle $p, q \in \mathbb{R}^n$. Seien $M, M' \subseteq \mathbb{R}^n$:
   M und M' heißen $\left\{ \begin{array}{c} \text{affin} \\ \text{metrisch oder euklidisch} \end{array} \right\}$ äquivalent, wenn es eine $\left\{ \begin{array}{c} \text{Affinität} \\ \text{Bewegung} \end{array} \right\}$ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, mit $f(M) = M'$.

2. Sind $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$, so ist $v^T \cdot M \cdot w \in \mathbb{R}^n$.
   Daher ist $v^T \cdot M \cdot w = (v^T \cdot M \cdot w)^T = w^T \cdot M^T \cdot v$

8.2 Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln

Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Ebene, uns sei $Q \subseteq H, Q \neq \emptyset$.
Q heißt Ellipse (in H), wenn es $p_1, p_2 \in H$ und $\varrho \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass gilt:

$$Q = \{p \in H \mid \|p - p_1\| + \|p - p_2\| = \varrho\}$$

Q heißt Hyperbel (in H), wenn es $p_1, p_2 \in H$ mit $p_1 \neq p_2$ und $\varrho \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass gilt:

$$Q = \{p \in H \mid |\|p - p_1\| - \|p - p_2\|| = \varrho\}$$

Q heißt Parabel (in H), wenn es eine Gerade $l \subseteq H$ und ein $p_0 \in H$ mit $p_0 \neq l$ gibt, so dass gilt:

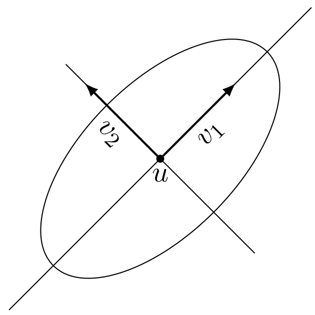
$$Q = \{p \in H \mid \text{Abstand von } p \text{ und } p_0 = \text{Abstand von } p \text{ und } l\}$$

Ab jetzt sei $n = 2$.

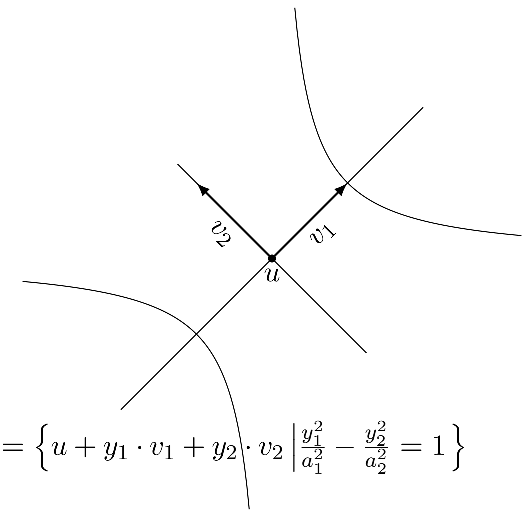
Ein Tripel (u, v_1, v_2) heißt Koordinatensystem (KS) im $\mathbb{R}^2$, wenn gilt:
$u \in \mathbb{R}^2$ und (v_1, v_2) ist Basis des $\mathbb{R}^2$. Wenn dabei (v_1, v_2) eine Orthonormalbasis (ONB) des $\mathbb{R}^2$ ist, nennt man (u, v_1, v_2) ein kartesisches Koordinatensystem.
Sei (u, v_1, v_2) ein Koordinatensystem im $\mathbb{R}^2$. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmte $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit $x - u = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2$ also $x = u + y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2$.
Man nennt $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ die Koordinatenspalte (KSp) von x bzgl. (u, v_1, v_2).
Wenn man die Matrix mit den Spalten v_1, v_2 mit S bezeichnet, hat man hier

$$x = u + y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 = u + S \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = u + S \cdot y$$

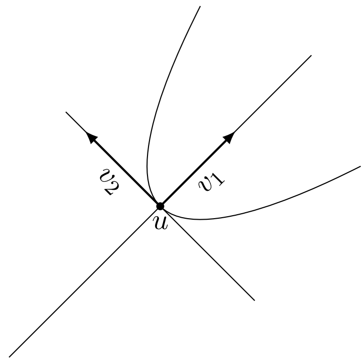
Sei $Q \in \mathbb{R}^2$ eine Ellipse bzw. eine Hyperbel bzw. eine Parabel. Wenn man u, v_1, v_2 wählt wie in folgenden Skizzen, so, dass (u, v_1, v_2) ein kartesisches Koordinatensystem ist, erhält man Q in der jeweils angegebenen Form:



$$Q = \left\{ u + y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 \,\middle|\, \frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = 1 \right\}$$



$$Q = \left\{ u + y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 \,\middle|\, \frac{y_1^2}{a_1^2} - \frac{y_2^2}{a_2^2} = 1 \right\}$$



$$Q = \left\{ u + y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 \,\middle|\, \frac{y_1^2}{a_1^2} = y_2 \right\}$$

Zur Bedeutung von a_1 und a_2 vergleiche Formelsammlung Barth, Mühlbauer. Seiten 42 ff.

Hier tauchen also quadratische Gleichungen in y_1, y_2 auf. Die allgemeine quadratische Gleichung in x_1, x_2 hat die Form

$$c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 + c_3 \cdot x_1 \cdot x_2 + c_4 \cdot x_1 + c_5 \cdot x_2 + c_6 = 0$$

oder

$$(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} c_1 & \frac{c_3}{2} \\ \frac{c_3}{2} & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (c_4, c_5) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c_6 = 0$$

Sei $Q \in \mathbb{R}^2, Q \neq \emptyset$. Q heißt Kegelschnitt (in $\mathbb{R}^2$), wenn es eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \neq 0$, ein $b \in \mathbb{R}^2$ und ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{x^T \cdot A \cdot x + b^T \cdot x + c = 0}_{(*)} \right\}$$

Man nennt $x^T \cdot A \cdot x$ bzw. $b^T \cdot x$ bzw. c den quadratischen bzw. den linearen bzw. den konstanten Teil von $(*)$.

Nun sei (u, v_1, v_2) ein Koordinatensystem in $\mathbb{R}^2$ und es sei $x \in \mathbb{R}^2$. $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sei die Koordinatenspalte von x bzgl. (u, v_1, v_2) und es sei S die Matrix mit den Spalten v_1, v_2. Dann ist $x = u + S \cdot y$ und man erhält

$$\begin{aligned}
x \in Q &\Leftrightarrow u + S \cdot y \in Q \\
&\Leftrightarrow (u + S \cdot y)^T \cdot A \cdot (u + S \cdot y) + b^T \cdot (u + S \cdot y) + c = 0 \\
&\Leftrightarrow (u^T + y^T \cdot S^T) \cdot (A \cdot u + A \cdot S \cdot y) + b^T \cdot u + b^T \cdot S \cdot y + c = 0 \\
&\Leftrightarrow u^T \cdot A \cdot u + u^T \cdot A \cdot S \cdot y + y^T \cdot S^T \cdot A \cdot u + y^T \cdot S^T \cdot A \cdot S \cdot y + b^T \cdot u + b^T \cdot S \cdot y + c = 0 \\
&\Leftrightarrow y^T \cdot (S^T \cdot A \cdot S) \cdot y + 2 \cdot u^T \cdot A \cdot S \cdot y + b^T \cdot S \cdot y + u^T \cdot A \cdot u + b^T \cdot u + c = 0 \\
&\Leftrightarrow y^T \cdot (S^T \cdot A \cdot S) \cdot y + (2 \cdot A \cdot u + b)^T \cdot S \cdot y + u^T \cdot A \cdot u + b^T \cdot u + c = 0 \quad (**)
\end{aligned}$$

Also: $x \in Q \Leftrightarrow$ Die Koordinatenspalte y von x bezüglich (u, v_1, v_2) erfüllt $(**)$.
Andere Interpretation von $(**)$:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Affinität mit $f^{-1}(y) = S \cdot y + u$. Dann gilt für $y \in \mathbb{R}^2$:

$$y \in f(Q) \Leftrightarrow f^{-1}(y) \in Q \Leftrightarrow u + S \cdot y \in Q \Leftrightarrow y \text{ erfüllt } (**)$$

Daher: $f(Q) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y \text{ erfüllt } (**)\}$ Durch geschickte Wahl von S und u kann man erreichen, dass $(**)$ die gleiche Lösungsmenge hat, wie eine der folgenden Gleichungen.

Gleichung für Q in metrischer oder euklidischer Normalform	Gleichung für Q in affiner Normalform	Typ von Q
$\frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$	$y_1^2 + y_2^2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$	Ellipse (Doppel-)Punkte
$\frac{y_1^2}{a_1^2} - \frac{y_2^2}{a_2^2} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$	$y_1^2 - y_2^2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$	Hyperbel Zwei sich schneidende Geraden
$\frac{y_1^2}{a_1^2} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ y_2 \end{cases}$	$y_1^2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ y_2 \end{cases}$	Paar paralleler Geraden (Doppel-)Geraden Parabel

Andere Interpretation: Durch geschickte Wahl von S und u kann man machen, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f^{-1}(y) = S \cdot y + u$ für $y \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$f(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ erfüllt eine der angegebenen Gleichungen} \right\}$$

$u \in \mathbb{R}^2$ heißt Mittelpunkt oder Zentrum von Q, wenn gilt
$2 \cdot A \cdot u + b = 0$ $(\Leftrightarrow A \cdot u = -\frac{1}{2} \cdot b)$.
Es gilt: u Mittelpunkt von $Q \Leftrightarrow Q$ geht bei Spiegelung an u in sich über.
Daher: Q Parabel $\Leftrightarrow Q$ hat keinen Mittelpunkt.

8.2.1 Berechnung einer Gleichung für Q in metrischer Normalform:

1. Berechne die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A, und eine ONB (v_1, v_2) des $\mathbb{R}^2$ aus zugehörigen Eigenvektoren. Bezeichnung so, dass $A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$ und $A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2$.
   S sei die Matrix mit den Spalten v_1, v_2.

2. Prüfe ob es $u \in \mathbb{R}^2$ mit $2 \cdot A \cdot u + b = 0$ gibt.

   a) Ja, gibt es, wähle so ein u.
      $(**)$ hat dann die Form $\lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2 + u^T \cdot A \cdot u + b^T \cdot u + c = 0$
      [Wegen $A \cdot u = -\frac{1}{2} \cdot b$ ist $u^T \cdot A \cdot u + b^T \cdot u + c =$
      $= -\frac{1}{2} \cdot u^T \cdot b + b^T \cdot u + c = \frac{1}{2} \cdot b^T \cdot u + c$
      $(**)$ hat also auch die Form $\lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2 + \frac{1}{2} \cdot b^T \cdot u + c = 0$]

   b) Es gibt kein $u \in \mathbb{R}^2$ mit $2 \cdot A \cdot u + b = 0$
      Dann ist A nicht invertierbar. Ein Eigenwert von A ist daher 0. Bezeichnung

so, dass $\lambda_2 = 0$ ist. Ersetzt man daher in $(*)$ x durch $S \cdot y$, so erhält man eine Gleichung der folgenden Form

$$\lambda_1 \cdot y_1^2 + c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + c_3 = 0 \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Oder nach quadratischer Ergänzung

$$\lambda_1 \cdot (y_1 + c_1')^2 + c_2 \cdot y_2 + c_3' = 0 \text{ mit } c_1', c_2, c_3' \in \mathbb{R}$$

Da Q eine Parabel ist, ist $c_2 \neq 0$. Man kann daher die letzte Gleichung umformen in eine Gleichung der Form

$$\lambda_1 \cdot \underbrace{(y_1' + c_1')}_{z_1} + c_2 \cdot \underbrace{(y_2 + c_3'')}_{z_2} = 0 \text{ mit } c_1', c_2, c_3'' \in \mathbb{R}$$

Setzt man hier $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + c_1' \\ y_2 + c_3'' \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - c_1' \\ z_2 - c_3'' \end{pmatrix}$ so erfüllt man die Gleichung $\lambda_1 \cdot z_1^2 + c_2 \cdot z_2 = 0$. Rest klar.

8.2.2 Alternative Berechnung einer Gleichung zu Q in affiner Normalform mittels quadratischer Ergänzung

$$\text{Sei } Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x_1^2 + \sqrt{3} \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x_1 - \frac{3}{2} \cdot x_2 + \frac{9}{4} = 0 \right\}$$

$$x_1^2 + \sqrt{3} \cdot x_1 \cdot x_2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x_1 - \frac{3}{2} \cdot x_2 + \frac{9}{4} = \left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x_2 \right)^2 - \frac{3}{4} \cdot x_2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x_1 - \frac{3}{2} \cdot x_2 + \frac{9}{4}$$

Mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_2 \end{pmatrix}$ erhält man

$$y_1^2 - \frac{3}{4} \cdot y_2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y_2 \right) - \frac{3}{2} \cdot y_2 + \frac{9}{4} = 0 \text{ , also}$$

$$\left(y_1 - \sqrt{3} \right)^2 - 3 - \frac{3}{4} \cdot y_2^2 + 3 \cdot y - \frac{3}{2} \cdot y_2 + \frac{9}{4} = 0 \text{ , also}$$

$$\left(y_1 - \sqrt{3} \right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \left(y_2^2 + 2 \cdot y^2 + 1 - 1 \right) - 3 + \frac{9}{4} = 0 \text{ , also}$$

$$\left(y_1 - \sqrt{3} \right)^2 - \frac{3}{4} \cdot (y_2 + 1)^2 + \frac{3}{4} - 3 + \frac{9}{4} = 0 \text{ , also}$$

$$\left(y_1 - \sqrt{3} \right)^2 - \frac{3}{4} \cdot (y_2 + 1)^2 = 0$$

Mit $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - \sqrt{3} \\ y_2 + 1 \end{pmatrix}$ erhält man $z_1^2 - \frac{3}{4} \cdot z_2^2 = 0$. Q ist also eine Gerade.
Mittelpunkt im x_1, x_2 Koordinatensystem:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

9 (Gewöhnliche) Differentialgleichungen (DGL)

9.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Hier sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen. Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$(D) \quad y' = f(x) \cdot y + g(x), \; (x, y) \in I \times \mathbb{R}$$

Eine Funktion $\psi : I \to \mathbb{R}$ heißt (maximale) Lösung von (D), wenn gilt:

a) ψ ist differentierbar

b) Für jedes $x \in I$ ist $\psi'(x) = f(x) \cdot \psi(x) + g(x)$

b) bedeutet: Für jedes $x_0 \in I$ hat der Graph von ψ im Punkt $(x_0, \psi(x_0))$ die Steigung $f(x_0) \cdot \psi(x_0) + g(x_0)$.

Satz: Die Menge L der Lösungen von (D) ist ein eindimensionaler affiner Unterraum des $\mathbb{R}$-VRs aller Abbildungen von I nach $\mathbb{R}$.
Sei Richtungsraum ist die Menge L_h der Lösungen der zu (D) gehörigen homogenen linearen Differentialgleichung (D_h) $y' = f(x) \cdot y$.

Wenn man L bestimmen will, so muss man also $\left.\begin{array}{l} \text{Ⓐ alle Lösungen von } (D_h) \\ \text{Ⓑ eine Lösung } \psi_p \text{ von } (D) \end{array}\right\}$ bestimmen.

Dann sind nämlich die Funktionen $\psi : I \to \mathbb{R}, \; \psi(x) = \psi_p(x) + p(x), \; p$ Lösung von (D_h) die Lösungen von (D).

9.1.1 Aufgabe

Seien $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen einer auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gegebenen linearen DGL (D) 1. Ordnung. Es sei $\psi_1(0) = 3$ und $\psi_2(0) = 4$. Bestimme eine Lösung ψ von (D) mit $\psi(0) = 0$.

Lösung: (L und L_h wie oben)

$$\psi_1, \psi_2 \in L \Rightarrow \psi_2 - \psi_1 \in L_h$$

$$\overset{dim(L_h)=1}{\underset{\psi_1 \neq \psi_2}{\Rightarrow}} L_h = \{c \cdot (\psi_2 - \psi_1) | c \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Daher } L = \{\psi_1 + c \cdot (\psi_2 - \psi_1) | c \in \mathbb{R}\}$$

c ist noch so zu bestimmen, dass $(\psi_1 + c \cdot (\psi_2 - \psi_1))(0) = 5$ gilt. Also

$$\psi_1(0) + c \cdot (\psi_2(0) - \psi_1(0)) = 5$$

$$3 + c \cdot (4 - 3) = 5 \text{ also } c = 2$$

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; \psi(x) = \psi_1(x) + 2 \cdot (\psi_2(x) - \psi_1(x))$$

ist die gesuchte Funktion.

9.1.2 Lösungsverfahren für (D)

Bestimme eine Stammfunktion F von f (existiert, da f stetig).
Zu Ⓐ: Die Funktion $\varphi_c : I \to \mathbb{R},\ \varphi_c(x) = c \cdot e^{F(x)}$ sind die Lösungen von (D_h).

Satz: Die einzige Lösung einer homogenen DGL 1. Ordnung die eine Nullstelle besitzt ist die Nullfunktion.

Zu Ⓑ: Man bestimme eine differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ so, dass $\psi_p : I \to \mathbb{R},\ \psi_p(x) = u(x) \cdot e^{F(x)}$ eine Lösung von (D) ist. (Variation der Konstanten)
Es gilt ψ_p Lösung von $(D) \Leftrightarrow$ Für jedes $x \in I$ ist

$$u'(x) \cdot e^{F(x)} + u(x) \cdot e^{F(x)} \cdot f(x) = f(x) \cdot u(x) \cdot e^{F(x)} + g(x)$$

$$\Leftrightarrow \text{ Für jedes } x \in I \text{ ist } u'(x) = g(x) \cdot e^{-F(x)}$$

Ist also $u : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $I \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x) \cdot e^{-F(x)}$, so sind die Funktionen $\psi_c : I \to \mathbb{R},\ \psi_c(x) = u(x) \cdot e^{F(x)} + c \cdot e^{F(x)},\ c \in \mathbb{R}$ die Lösungen von (D). Man nennt ψ_c die allgemeine Lösung von (D).

9.1.3 Aufgabe

Für welche $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Lösung φ von

$$(*)\quad y' = \frac{\arctan\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\exp(x^2) \cdot (2 + \sin(x))} \cdot y$$

mit $p(0) = 0$ und $p(1) = a$.

Lösung: $(*)$ ist eine homogene lineare DGL 1. Ordnung. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\cdots}{\cdots}$ ist stetig. Die einzige Lösung p von $(*)$ mit $p(0) = 0$ ist die Nullfunktion. Für die gilt $p(1) = 0$. Also gibt es so ein φ wie gewünscht. Dann ist $a = 0$. Wenn $a = 0$ hat die Nullfunktion die gewünschte Eigenschaft.

9.1.4 Beispiel 8.2

Bestimme die allgemeine Lösung von $x \cdot y' + 3 \cdot y - 5 \cdot x^2 = 0$ auf $]0, \infty[$.
Die gegebene DGL hat die gleiche Lösungsmenge wie die DGL

$$(*)\quad y' = -\frac{3}{x} \cdot y + 5 \cdot x,\ (x, y) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$$

$x \mapsto x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ ist eine Stammfunktion von $x \mapsto -\frac{3}{x}$. Daher ist die Funktion

$$\varphi_c :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ \varphi_c(x) = c \cdot \frac{1}{x^3},\ c \in \mathbb{R}$$

die Lösung von

$$y' = -\frac{3}{x} \cdot y,\ (x, y) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$$

Variation der Konstanten:
Bestimme differenzierbare Funktion $u :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ so, dass

$$\psi_p :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ \psi_p(x) = u(x) \cdot x^{-3}$$

eine Lösung von $(*)$ ist.
Zu bestimmen ist daher eine Stammfunktion u von $x \mapsto 5 \cdot x \cdot x^3 = 5 \cdot x^4$.
u mit $u(x) = x^5$ ist so eine. Daher ist $x \mapsto x^2$ eine Lösung von $(*)$ und
$\psi_c(x) = x^2 + c \cdot \frac{1}{x^3},\ c \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung von $(*)$.

9.1.5 Beispiel 8.19

Gegeben:

$$(*)\quad y' = \frac{y-1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \cdot y - \frac{1}{x^2+1}$$

$x \to 1 + c \cdot e^{\arctan(x)},\ c \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung von $(*)$.
Nun sei noch $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ gegeben.

$\psi : I \to \mathbb{R}$ heißt (maximale) Lösung des Anfangwertproblems

$$(A)\quad \begin{cases} y' = f(x) \cdot y + g(x),\ (x, y) \in I \times \mathbb{R} \\ \qquad y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Wenn ψ Lösung von

$$y' = f(x) \cdot y + g(x),\ (x, y) \in I \times \mathbb{R}$$

ist, und $\psi(x_0) = y_0$ gilt.

9.2 Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Hier sind $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ reelle Zahlen.
Behandelt wird die Differentialgleichung

$$(D_h)\quad y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt (maximale) Lösung von (D_h) wenn

a) φ ist n-mal differenzierbar

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot \varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 \cdot \varphi'(x) + a_0 \cdot \varphi(x) = 0$$

9.2.1 Satz

Die Menge L_h aller Lösungen von (D_h) ist ein n-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Eine Basis von L_h nennt man auch ein Lösungsfundamentalsystem für (D_h).
Die zentrale Rolle bei der Ermittlung einer Basis von L_h spielt das Polynom

$$p(T) = T^n + a_{n-1} \cdot T^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot T + a_0$$

man nennt es das charakteristische Polynom für (D_h). Es gilt nämlich:
Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine l-fache Nullstelle von $p(T)$, so sind

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\lambda \cdot x} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot e^{\lambda \cdot x} \\ \vdots \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{l-x} \cdot e^{\lambda \cdot x} \end{array}$$

Lösungen von (D_h).
Ist $\alpha + i \cdot \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Nullstelle von $p(T)$, so sind

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \end{array}$$

Lösungen von (D_h).
Bemerkung: Ist $\alpha + i \cdot \beta$ Nullstelle von $p(T)$, so ist es auch $\alpha - i \cdot \beta$.

9.2.2 Nun sei $n = 2$

1. Fall: $p(T)$ hat zwei verschiedene reelle Nullstellen λ, μ. Dann bilden

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\lambda \cdot x} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\mu \cdot x} \end{array}$$

   eine Basis von L_h.

2. Fall: $p(T)$ eine reelle Doppelnullstelle λ. Dann bilden

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\lambda \cdot x} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot e^{\lambda \cdot x} \end{array}$$

   eine Basis von L_h.

3. Fall: $p(T)$ eine Nullstelle $\alpha + i \cdot \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann bilden

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \end{array}$$

   eine Basis von L_h.

9.2.3 Nun sei $n = 3$

1. Fall: $p(T)$ hat die verschiedenen reelle Nullstellen λ, μ, ν. Dann bilden

$$\begin{gathered}\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\lambda \cdot x} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\mu \cdot x} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\nu \cdot x}\end{gathered}$$

   eine Basis von L_h.

2. Fall: $p(T)$ eine reelle Nullstelle λ und eine davon verschiedene Doppelnullstelle μ. Dann bilden

$$\begin{gathered}\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\lambda \cdot x} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\mu \cdot x} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot e^{\mu \cdot x}\end{gathered}$$

   eine Basis von L_h.

3. Fall: $p(T)$ eine dreifache Nullstelle λ. Dann bilden

$$\begin{gathered}\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\lambda \cdot x} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot e^{\lambda \cdot x} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \cdot e^{\lambda \cdot x}\end{gathered}$$

   eine Basis von L_h.

4. Fall: $p(T)$ eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\alpha + i \cdot \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann bilden

$$\begin{gathered}\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\lambda \cdot x} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x)\end{gathered}$$

   eine Basis von L_h.

9.3 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Hier sind $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R},\ I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $\neq 0$. Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$(D) \quad y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x),\ x \in I$$

$\varphi : I \to \mathbb{R}$ (maximale) Lösung von $(D) \Leftrightarrow \ldots$

$$(D_h) \quad y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

sei die zu (D) gehörige homogene Differentialgleichung. $p(T)$ sei ihr charakteristisches Polynom.

9.3.1 Satz

Die Menge L aller Lösungen von (D) ist ein n-dimensionaler affiner Unterraum vom Vektorraum aller Abbildungen von I nach $\mathbb{R}$.
Sein Richtungsraum ist $U = \{\varphi|_I \mid \varphi \text{ Lösung von } (D_h)\}$.

Wenn man L bestimmen will braucht man daher nur eine Lösung von (D) zu bestimmen. Das geht immer mit „Variation der Konstanten“. Im Staatsexamen wird mit „Ansätzen“ gearbeitet. Es gilt:
Hat $f(x)$ die Form

$$f(x) = (c_o + c_1 \cdot x + \ldots + c_m \cdot x^m) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \begin{array}{c} \cos(\beta \cdot x) \\ \text{oder} \sin(\beta \cdot x) \end{array}$$

mit $c_0, c_1, \ldots, c_m, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und ist $\alpha + i \cdot \beta$ l-fache Nullstelle von $p(T)$, so gibt es $A_0, A_1, \ldots, A_m, B_0, B_1, \ldots, B_m \in \mathbb{R}$ so dass $\psi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi(x) = x^l \cdot ((A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + (B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x))$$

für jedes $x \in I$ eine Lösung von (D) ist.

$$\begin{array}{llll} f(x) = 10 \cdot \cos(x) & n = 0 & \alpha = 0 & \beta = 1 \\ f(x) = -4 \cdot x^2 - 1 & n = 2 & \alpha = 0 & \beta = 0 \\ f(x) = e^{-x} & n = 0 & \alpha = -1 & \beta = 0 \end{array}$$

9.3.2 Beispiele

1. Gegeben $y'' + y' = x,\ x \in \mathbb{R}$.
   $p(T) = T^2 + T = T \cdot (T + 1)$

   $$\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{0 \cdot x} = 1 \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x} \end{array}$$

   bilden eine Basis des Lösungsraums von $y'' + y' = 0$.
   $f(x) = x,\ m = 1,\ \alpha = 0,\ \beta = 0$
   $\alpha + i \cdot \beta = 0$ ist einfache Nullstelle von $p(T)$.
   Suche daher A_0 und $A_1 \in \mathbb{R}$, so dass ψ mit $\psi(x) = x \cdot (A_0 + A_1 \cdot x)$ Lösung von $y'' + y' = x$ ist.

   $$\begin{array}{l} \psi(x) = A_0 \cdot x + A_1 \cdot x^2 \\ \psi'(x) = A_0 + 2 \cdot A_1 \cdot x \\ \psi''(x) = 2 \cdot A_1 \end{array}$$

   $$\psi''(x) + \psi'(x) = A_0 + 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_1 \cdot x \overset{!}{=} x$$

   Für $A_1 = \frac{1}{2}$ und $A_0 = -1$ ist das der Fall. Also $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \psi(x) = -x + \frac{x^2}{2}$ ist Lösung von $y'' + y' = x$.
   Die Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x + \frac{x^2}{2} + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot e^{-x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sind die Lösungen von $y'' + y' = x$.

2. Gegeben $y'' + y' = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$.
   Hier $f(x) = \sin(x)$, also $m = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 1$
   $\alpha + i \cdot \beta = i$ ist nullfache Nullstelle von $p(T)$.
   Suche daher A_0, B_0 so dass ψ mit $\psi(x) = A_0 \cdot \cos(x) + B_0 \cdot \sin(x)$ eine Lösung von $y'' + y' = \sin(x)$ ist.

$$\begin{aligned}\psi(x) &= A_0 \cdot \cos(x) + B_0 \cdot \sin(x)\\ \psi'(x) &= -A_0 \cdot \sin(x) + B_0 \cdot \cos(x)\\ \psi''(x) &= -A_0 \cdot \cos(x) - B_0 \cdot \sin(x)\end{aligned}$$

$$\psi''(x) + \psi'(x) = (B_0 - A_0) \cdot \cos(x) - (A_0 + B_0) \cdot \sin(x) \overset{!}{=} \sin(x)$$

   Mit $A_0 = B_0$ und $-(A_0 + B_0) - 2 \cdot A_0 = 1$ ist dies erfüllt. Daher ist
   $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \psi(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos(x) - \frac{1}{2} \cdot \sin(x)$ Lösung von $y'' + y' = \sin(x)$

3. Gegeben $y'' + y' = x + \sin(x)$
   ψ_1 Lösung von $y'' + y' = x$
   ψ_2 Lösung von $y'' + y' = \sin(x) \Rightarrow \psi_1 + \psi_2$ ist Lösung von $y'' + y' = x + \sin(x)$.

   Alternative Lösungsmöglichkeit:
   Setze $z = y'$. Dann geht $y'' + y' = x + \sin(x)$ über in $z' = -z + x + \sin(x)$. Das ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für z. Berechne $z = y'$ und y durch Integration.

9.4 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Hier sind $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : V \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen. Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$(D) \quad y' = f(x) \cdot g(y) \quad (x, y) \in U \times V$$

Definition: φ heißt Lösung von (D) über I, wenn gilt:

1. I ist ein Intervall mit $I \subseteq U$.
2. $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist eine differenzierbare Funktion.
3. Für jedes $x \in I$ ist
   a) $\varphi(x) \in V$
   b) $\varphi'(x) = \varphi(x) \cdot g(\varphi(x))$

Wenn $g(c) = 0$ für jedes $c \in V$ ist, so ist $\varphi_c : U \to \mathbb{R},\ \varphi_c(x) = c$ für jedes $x \in U$ eine Lösung von (D) über U.
Wenn g stetig differenzierbar ist gilt der Eindeutigkeitssatz.

> Sind φ, ψ Lösungen von (D) über I, so gilt:
> Ist $\varphi(a) = \psi(a)$ für ein $a \in I$, so ist
> $\varphi(x) = \psi(x)$ für jedes $x \in I$.

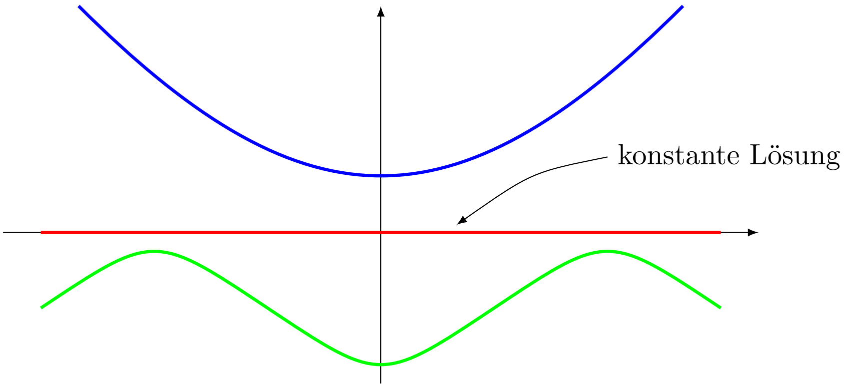
Wenn das der Fall ist, hat man hier die folgenden Möglichkeiten für eine Lösung φ von (D) über I,

1. $\varphi(x) = c$ für jedes $x \in I$
2. $\varphi(x) > c$ für jedes $x \in I$
3. $\varphi(x) < c$ für jedes $x \in I$

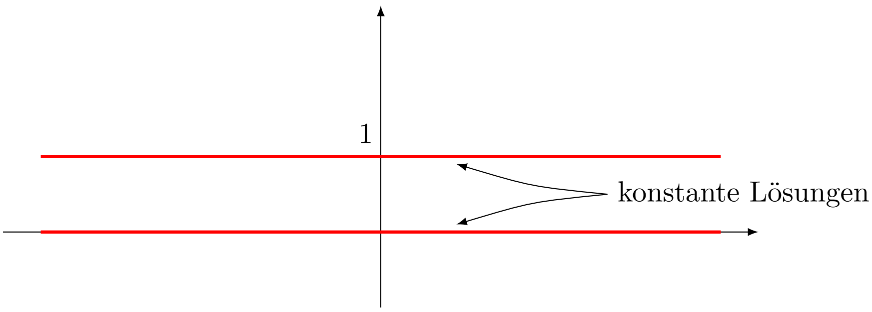
denn es gilt der Zwischenwertsatz. (φ stetig, I Intervall)

9.4.1 Beispiele:

1. $y' = 2 \cdot x \cdot y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
   $(U = \mathbb{R},\ V = \mathbb{R},\ f(x) = 2 \cdot x,\ g(y) = y^2)$



2. $y' = 2 \cdot x \cdot y \cdot (y - 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Hier hat man die folgenden Möglichkeiten für eine Lösung φ über I:

1. $\varphi(x) = 0$ für jedes $x \in I$
2. $\varphi(x) = 1$ für jedes $x \in I$
3. $\varphi(x) > 1$ für jedes $x \in I$
4. $\varphi(x) < 0$ für jedes $x \in I$
5. $0 < \varphi(x) < 1$ für jedes $x \in I$

9.4.2 Nun sei $(x_0, y_0) \in U \times V$

φ heißt Lösung des Anfangwertproblems

$$(A) \begin{cases} y' = f(x) \cdot g(y), & (x,y) \in U \times V \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

wenn gilt:

1. $x_0 \in I$
2. φ ist Lösung von $y' = f(x) \cdot g(y), \quad (x,y) \in U \times V$
3. $\varphi(x_0) = y_0$

9.4.3 Lösungsverfahren für (A), wenn $g(y) \neq 0$ für jedes $y \in V$ ist.

1. Berechne
$$F : U \to \mathbb{R},\ F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\ dt$$
2. Berechne
$$G : V \to \mathbb{R},\ G(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\ ds$$
Behauptung: G ist streng monoton
Beweis: Da g stetig ist, und keine Nullstele hat, ist $\frac{1}{g}$ stetig. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist G differenzierbar und es ist
$$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \text{ für jedes } y \in V.$$
$g : V \to \mathbb{R}$ ist stetig und hat keine Nullstelle.
Daher ist nach dem Zwischenwertsatz entweder
$g(y) > 0$ für jedes $y \in V$
$g(y) < 0$ für jedes $y \in V$
denn V ist ein Intervall.
3. Wenn $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (A) über I ist gilt
$$\varphi'(t) = f(t) \cdot g(\varphi(t)) \text{ für jedes } t \in I.$$
Daher ist
$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\ dt = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\ dt \underset{\frac{ds}{dt}=\varphi'(t)}{\overset{s=\varphi(t)}{=}} \int\limits_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(s)}\ ds = G(\varphi(x))$$

Das funktioniert natürlich nur dann, wenn $F(x) \in G(V)$ für jedes $x \in I$ ist.
Das größte Intervall auf dem eine Lösung von (A) existiert ist daher das größte Intervall I mit $x_0 \in I \subseteq U$ und $F(x) \in G(V)$ für jedes $x \in I$.
Das liefert folgendes Rezept:

9.4.4 Beispiel 8.16

$$(A_+)\begin{cases} y' = 2\cdot x\cdot y^2, & (x,y)\in\mathbb{R}\times]0,\infty[\\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Berechne $F(x)$:
$$F(x) = \int_1^x 2\cdot t\; dt$$

2. Berechne $G(y)$:
$$G(y) = \int_{\frac{1}{2}}^{y} \frac{1}{s^2}\; ds = -\frac{1}{s}\bigg|_{\frac{1}{2}}^{y} = 2 - \frac{1}{y}$$

3. Berechne $G(V)$:
$$G(V) =]-\infty, 2[$$

4. Bestimme die x mit $F(x)\in G(V)$:
$$\begin{aligned} F(x)\in G(V) &\Leftrightarrow x^2-1\in]-\infty,2[\\ &\Leftrightarrow x^2 \in]-\infty,3[\\ &\Leftrightarrow x\in]-\sqrt{3},\sqrt{3}[\end{aligned}$$

5. Das größte Intervall I mit $x_0\in I\subseteq U$ und $F(x)\in G(V)$ für jedes $x\in I$ ist das maximale Definitionsintervall einer Lösung von (A).

Das maximale Definitionsintervall einer Lösung
φ von (A_+) ist das Intervall $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$.
$\varphi]-\sqrt{3},\sqrt{3}[\to\mathbb{R},\; x^2-1 = 2-\frac{1}{\varphi(x)}$, also
$\varphi(x) = \frac{1}{3-x^2}$ ist die gesuchte Lösung.

9.4.5 Beispiel

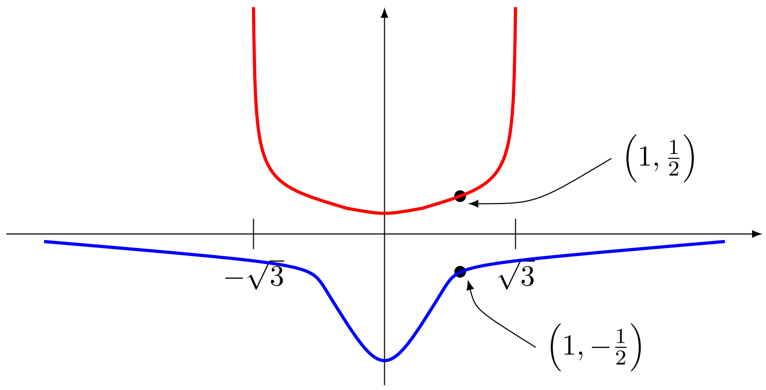
$$(A_-)\begin{cases} y' = 2\cdot x\cdot y^2, & (x,y)\in\mathbb{R}\times]-\infty,0[\\ y(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F(x) = x^2-1$$

$$G(y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{y}\frac{1}{s^2}\; ds = -\frac{1}{s}\bigg|_{-\frac{1}{2}}^{y} = -\frac{1}{y}+\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2-\frac{1}{y}$$

$$G\left(]-\infty,0[\right) =]-2,\infty[$$

Für jedes $x\in\mathbb{R}$ ist $x^2-1\in]-2,\infty[$.
Das maximale Definitionsintervall einer Lösung $\varphi(A)$ über I ist daher $\mathbb{R}$.
$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\; x^2-1 = -2-\frac{1}{\varphi(x)}$, also $\varphi(x) = -\frac{1}{x^2-1}$ ist die gesuchte Lösung.



9.5 Ergänzungen

9.5.1 Unbekannte Typen

a) **8.44**

$$y'''' + 2 \cdot y''' - 8 \cdot y'' = \exp(x)$$

$z = y''$
$z'' + 2 \cdot z' - 8 \cdot z = \exp(x)$
Bestimme z und dann y' und y.

b) **8.22**

$$y' = y^3 - \frac{y}{x}, \ x > 0$$

$z = \frac{1}{y^2}$
$\left(z(x) = \frac{1}{y(x)^2}\right)$
$z' = -\frac{2}{y^3} \cdot y'$
$z' = -\frac{2}{y^3} \cdot (y^3 - \frac{y}{x}) = -2 + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{2 \cdot z}{x} - 2$
Bestimme z und dann y mit $y^2 = \frac{1}{z}$.

c) **8.24** Seien $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ stetig

$$(D) \quad y'' + f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0$$

Sei φ Lösung von (D)
Behauptung: $h \cdot \varphi$ Lösung von $(D) \Leftrightarrow h'' \cdot \varphi + h' \cdot (2 \cdot \varphi' + f \cdot \varphi) = 0$
Beweis:

$$\begin{aligned} h \cdot \varphi \text{ Lösung von } (D) &\Leftrightarrow (h \cdot \varphi)'' + f(h \cdot \varphi)' + g(h \cdot \varphi) = 0 \\ &\Leftrightarrow h'' \cdot \varphi + h' \cdot \varphi' + h' \cdot \varphi' + h \cdot \varphi'' + f(h' \cdot \varphi + h \cdot \varphi') + g(h \cdot \varphi) = 0 \\ &\Leftrightarrow h \cdot (\underbrace{\varphi'' + f \cdot \varphi' + g \cdot \varphi}_{=0}) + h'' \cdot \varphi + 2 \cdot h' \cdot \varphi' + f \cdot h' \cdot \varphi = 0 \\ &\Leftrightarrow h'' \cdot \varphi + h' \cdot (2 \cdot \varphi + f \cdot \varphi) = 0 \end{aligned}$$

9.5.2 Systeme

Gegeben sei

$$(D)\begin{cases} y_1' = a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 \\ y_2' = b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2 \end{cases} \quad \text{mit } a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ heißt (maximale) Lösung von (D), wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$\varphi_1'(x) = a_1 \cdot \varphi_1(x) + a_2 \cdot \varphi_2(x)$
$\varphi_2'(x) = b_1 \cdot \varphi_1(x) + b_2 \cdot \varphi_2(x)$
Satz: Die Menge L der Lösungen von (D) ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von allen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$.
Wenn $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ besitzt erhält man eine Basis von L wie folgt:
Man bestimme Eigenvektoren v bzw. w von A bzgl. λ bzw. μ. Dann bilden $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(x) = e^{\lambda \cdot x} \cdot v$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \psi(x) = e^{\mu \cdot x} \cdot w$ eine Basis von L.

10 Stetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, sei $p \in D$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

f stetig in $p \Leftrightarrow$ zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass gilt:
$x \in D$ und $\|x - p\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$
$\Leftrightarrow$ für jede gegen $p$konvergente Folge (p_n) aus Elementen von D ist $(f(p_n))$ konvergent gegen $f(p)$.
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

10.1 Beispiele

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

   Behauptung: f ist stetig in 0.
   Beweis: Für $x \neq 0$ ist

   $$|f(x) - f(0)| = \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

   $|f(0)| \leq |0|$ gilt sowieso.
   Es ist also $0 \leq |f(x) - f(0)| \leq |x|$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

   $$\xrightarrow{x \to 0} \ 0 \ \xleftarrow{x \to 0}$$

   Es folgt $\lim\limits_{x \to 0} |f(x) - f(0)| = 0$, also

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(0))=0$, also
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

2. Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq 0\\ 0 & \text{für } (x,y)=0\end{cases}$

   Behauptung: f ist stetig in $(0,0)$.
   Beweis: Für $(x,y)\neq(0,0)$ ist

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|=\frac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2}\leq\frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}\leq\frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|x|+\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot|y|\leq|x|+|y|$$

   Es ist also $0\leq|f(x,y)-f(0,0)|\leq|x|+|y|$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$0 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0, \qquad |f(x,y)-f(0,0)| \to 0, \qquad |x|+|y| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

   Wie eben folgt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

3. Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq 0\\ 0 & \text{für } (x,y)=0\end{cases}$

   Behauptung: f ist nicht stetig in $(0,0)$.
   Beweis:

   Wegen $f(x,x)=\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$ für jedes $x\neq 0$ ist $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=\dfrac{1}{2}\neq 0=f(0)$

4. Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\cdot y}{x^4+y^2} & \text{für } (x,y)\neq 0\\ 0 & \text{für } (x,y)=0\end{cases}$

   Behauptung: f ist nicht stetig in $(0,0)$.
   Beweis: Für $x\neq 0$ ist $f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$
   Daher ist $\lim\limits_{x\to 0}(x,x^2)=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$

11 Differenzierbarkeit

Sei $D\subseteq\mathbb{R}$, sei $p\in D$ und sei $f:D\to\mathbb{R}$ eine Funktion.

f heißt differenzierbar in $p \Leftrightarrow$ Es gibt $c\in\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}=c$, dann $f'(p):=c$

$\underset{x=p+h}{\Leftrightarrow}$ Es gibt $c\in\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(p+h)-f(p)}{h}=c$, dann $f'(p):=c$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, sei $(a,b) \in D$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
f heißt in (a,b) partiell differenzierbar nach der nach der 1. Variablen
$\Leftrightarrow$ Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = c$, dann $(\partial_1 f)(a,b) := c$
f heißt in (a,b) partiell differenzierbar nach der nach der 2. Variablen
$\Leftrightarrow$ Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{y \to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = c$, dann $(\partial_2 f)(a,b) := c$

11.1 Beispiele

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$
   Behauptung: f ist nicht differenzierbar in 0.
   Beweis: Für $x \neq 0$ ist $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
   $$\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot n\right) = 1 \qquad \frac{1}{a_n} = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot n\right]$$
   Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot n}$ dann ist $\lim\limits_{n \to 0} a_n = 0$ aber
   $$\left(\sin\left(\frac{1}{a_n}\right)\right)_{n \geq 0} = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot n\right)\right)_{n \geq 0} = (1,1,1,\ldots) \text{ ist konvergent gegen 1.}$$
   Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $b_n = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot n}$ dann ist $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$ aber
   $$\left(\sin\left(\frac{1}{b_n}\right)\right)_{n \geq 1} = \left(\sin\left(2 \cdot \pi \cdot n\right)\right)_{n \geq 1} = (0,0,0,\ldots) \text{ ist konvergent gegen 0.}$$
   $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert also nicht.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} \sin(x) \cdot \arctan\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$
   Zeige, dass $(\partial_1 f)(0,0)$ existiert und bestimme diese Zahl.
   Lösung:
   $$\text{Für } x \neq 0 \text{ ist } \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\arctan \underbrace{\left(\ln \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)}_{\to\infty}\right)}_{\to\infty}}_{\to\frac{\pi}{2}} \text{ Man erhält } (\partial_1 f)(0,0) = \frac{\pi}{2}$$

3. **6.18** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = |x-y| \cdot y$.
   Bestimme alle Stellen in denen f nicht partiell differenzierbar ist.

Lösung:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-y)\cdot y & \text{für } x > y \\ 0 & \text{für } x = y \\ -(x-y)\cdot y & \text{für } x < y \end{cases}$$

In jedem Punkt (a,b) mit $b \neq a$ ist f partiell differenzierbar. Zu suchen sind daher nur die Punkte $(a,a),\ a \in \mathbb{R}$.
1. Variable:

$$\text{Für } x \neq a \text{ ist } \frac{f(x,a)-f(a,a)}{x-a} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(x-a)\cdot a}{x-a} & \text{für } x > a \\ \frac{-(x-a)\cdot a}{x-a} & \text{für } x < a \end{array} \right\} = \begin{cases} a & \text{für } x > a \\ -a & \text{für } x < a \end{cases}$$

f ist daher in (a,a) nicht partiell differenzierbar nach der 1. Variablen, wenn $a \neq 0$ ist. Noch zu untersuchen ist die partielle Differenzierbarkeit von f in $(0,0)$.
1. Variable:

$$\text{Für } x \neq 0 \text{ ist } \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$$

f ist also in $(0,0)$ partiell differenzierbar nach der 1. Variablen.
2. Variable:

$$\text{Für } y \neq 0 \text{ ist } \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{|-y|\cdot y}{y} = |-y| \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$$

f ist also auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar nach der 2. Variablen.
Ergebnis: f ist in (a,b) nicht partiell differenzierbar $\Leftrightarrow b = a$ und $a \neq 0$.

12 Darstellende Matrizen

Sei $f : V \to W$ linear.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[\text{linear}]{f} & W \\ (v_1,\dots,v_m) & & (w_1,\dots,w_n) \\ \text{Basis von } V & & \text{Basis von } W \end{array}$$

Die darstellende Matrix von f bzgl. $(v_1,\dots,v_m)$ und $(w_1,\dots,w_n)$ erhält man wie folgt:
Man bestimmt $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$ mit $f(v_1) = \alpha_1\cdot w_1 + \dots + \alpha_n \cdot w_n$

1. Spalte von M : $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Man bestimmt $\beta_1,\dots,\beta_n \in K$ mit $f(v_2) = \beta_1\cdot w_1 + \dots + \beta_n \cdot w_n$

2. Spalte von M : $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

12.1 Beispiel

$V = \mathbb{R}^{2\times 2},\ W = \mathbb{R}^2$

$\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$ ist Basis von V, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ ist Basis von W

$$f : V \to W \text{ sei definiert durch } f\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+c+d\\a+d\end{pmatrix},\ f \text{ ist linear.}$$

Bestimme die Matrix M von f bzgl. der angegebenen Basen.

$$\left.\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
f\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
f\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} M = \begin{pmatrix}0&2&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

Sei $A = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

Bestimme die Koordinatenspalte von A bzgl. der angegebenen Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + \gamma\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + \delta\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$\alpha = 1,\ \gamma = 4,\quad \left.\begin{aligned}\beta+\delta=2\\ \beta-\delta=3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta = \frac{5}{2},\ \delta = -\frac{1}{2}$

Ergebnis:

$\begin{pmatrix}1\\\frac{5}{2}\\4\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ist die Koordinatenspalte von $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ bzgl. der angegebenen Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

$f\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ ist die Koordinatenspalte von $f\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Wenn die Theorie stimmt, muss $\begin{pmatrix}0&2&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\\frac{5}{2}\\4\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ gelten. Das stimmt.

$f : K^m \to K^n$ linear.

$$f(x) = A \cdot x \text{ für jedes } x \in K^m,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} K^m & \longrightarrow & K^n \\ (e_1, \dots, e_m) & & (e'_1, \dots, e'_n) \end{array}$$

$$f(a_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_{n1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also: 1. Spalte der Matrix von f bzgl. der Standardbasen = 1. Spalte von A. Für die übrigen Spalten analog. A ist also die darstellende Matrix von $f : K^m \to K^n$,
$f(x) = A \cdot x$ bzgl. der Standardbasen des K^m bzw. K^n.

12.2 Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an einer Ebene H durch 0, f ist linear. Wähle Basis (b_1, b_2, b_3) des $\mathbb{R}^3$ so, dass $b_1, b_2 \in H$ und $b_3 \perp H$ gilt. Die Matrix von M von f bzgl. (b_1, b_2, b_3)

$$\left.\begin{array}{l} f(b_1) = b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 \\ f(b_2) = b_2 = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 \\ f(b_3) = -b_3 = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + (-1) \cdot b_3 \end{array}\right\} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimme A aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $f(x) = A \cdot x$ für jedes $x \in \mathbb{R}^3$. Hat A diese Eigenschaft, so gilt:

$$\begin{aligned} A \cdot b_1 &= f(b_1) = b_1 \\ A \cdot b_2 &= f(b_2) = b_2 \\ A \cdot b_3 &= f(b_3) = -b_3 \end{aligned}$$

Oder in Matrizenschreibweise:

$$A \cdot (b_1, b_2, b_3) = (b_1, b_2, -b_3)$$

Die Spalten der Matrix (b_1, b_2, b_3) sind linear unabhängig. Sie ist also invertierbar und man erhält

$$A = (b_1, b_2, -b_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)^{-1}$$

12.3

Seien V, W K-Vektorräume, $f : V \to W$ sei linear, und $(v_1, \dots, v_m)$ bzw. $(w_1, \dots, w_n)$ sei Basis von V bzw. W. M sei die Matrix von f bzgl. dieser Basen. Es gilt:

1. Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m$ ist $M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_m \cdot v_m \in Kern(f)$
2. $Dim(Kern(f)) = m - Rang(M)$
3. Dim(Bild(f))=Rang(M)

Sei V ein K-Vektorraum, sei $f : V \to V$ linear, und sei $(v_1, \ldots, v_m)$ eine Basis von V. M sei die Matrix von f bzgl. $(v_1, \ldots, v_m)$. Dann gilt:

1. λ ist Eigenwert von $M \Leftrightarrow \lambda$ ist Eigenwert von f.
2. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda \Leftrightarrow x_1 \cdot v_1 + \ldots + x_m \cdot v_m$ ist Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.

12.4 Beispiel 5.19

Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ Elemente des $\mathbb{R}^3$.
$V := \mathbb{R} \cdot v_1 + \mathbb{R} \cdot v_2 + \mathbb{R} \cdot w_1 + \mathbb{R} \cdot w_2$.

a) Zeige: (v_1, v_2) ist die Basis von V. Stelle w_1, w_2 als Linearkombination von v_1, v_2 dar.
Lösung:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also wird V erzeugt von v_1, v_2.
v_1, v_2 ist aber offensichtlich auch linear unabhängig.

b) Begründe, dass es genau einen Endomorphismus

$$f : V \to V \text{ mit } f(v_1) = w_1 \text{ und } f(v_2) = w_2$$

gibt und gib die Matrix von f bzgl. v_1, v_2 an.
Lösung: Da (v_1, v_2) eine Basis von V ist, gibt es genau so ein f (Prinzip der linearen Fortsetzung).
Wegen $\begin{matrix} f(v_1) = w_1 = 2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 \\ f(v_2) = w_2 = 1 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2 \end{matrix}$ ist $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ die Matrix von f bzgl. (v_1, v_2).

c) Zeige, dass f diagonalisierbar ist, bestimme eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.
<u>Lösung:</u>

$$\lambda \text{ Eigenwert von } f \Leftrightarrow \lambda \text{ Eigenwert von } M \Leftrightarrow det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 3 = 0 \Leftrightarrow 5 - 6\cdot\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)\cdot(\lambda-5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = 5$$

M und damit f ist also diagonalisierbar. Bestimme Eigenvektoren von M:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor von } M \text{ zum Eigenwert } 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor von } M \text{ zum Eigenwert } 5$$

Folglich ist

$$(-1)\cdot v_1 + 1\cdot v_2 \text{ Eigenvektor von } f \text{ zum Eigenwert } 1$$

$$1\cdot v_1 + 3\cdot v_2 \text{ Eigenvektor von } f \text{ zum Eigenwert } 5$$

12.5 Prinzip der linearen Fortsetzung

$$\begin{array}{rcl} V & \xrightarrow[\text{linear}]{f} & W \\ v_1 & \longrightarrow & w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_m & \longrightarrow & w_m \\ \text{Basis von } V & & \text{beliebig} \end{array}$$

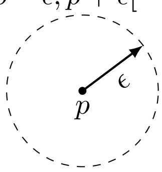
f injektiv $\Leftrightarrow (w_1, \dots, w_m)$ linear unabhängig.
f surjektiv $\Leftrightarrow (w_1, \dots, w_m)$ Erzeugendensystem von W.

13 Topologisches

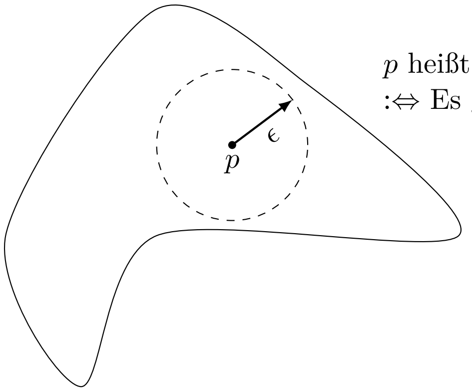
Für $p \in \mathbb{R}^n$ und $\epsilon \in R,\ \epsilon > 0$ sei

$$V_\epsilon(p) := \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} |\ |x-p| < \epsilon\} \text{ für } n = 1 \\ \{x \in \mathbb{R}^n |\ \|x-p\| < \epsilon\} \text{ für } n > 1 \end{cases}$$

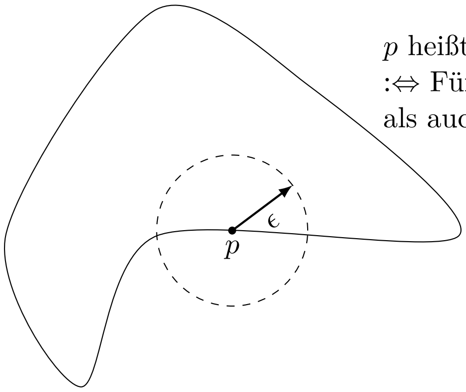
$n = 1:\ K_\epsilon(p) =]p-\epsilon, p+\epsilon[$

$n = 2: K_\epsilon(p) =$ 

Nun sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}^n$



p heißt innerer Punkt von M
$:\Leftrightarrow$ Es gibt ein (von p abhängiges) $\epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(p) \subseteq M$.



p heißt Randpunkt von M
$:\Leftrightarrow$ Für jedes $\epsilon > 0$ liegen in $K_\epsilon(p)$ sowohl Elemente von M als auch Elemente von $\mathbb{R}^n \setminus M$.

M heißt offen $:\Leftrightarrow$ Zu jedem $p \in M$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(p) \subseteq M$
M heißt abgeschlossen$:\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus M$ ist offen
$:\Leftrightarrow$ Jeder Randpunkt von M liegt in M
M heißt beschränkt $:\Leftrightarrow$ Es gibt ein $\epsilon > 0$ mit $M \subseteq K_\epsilon(0)$
M heißt kompakt $:\Leftrightarrow$ M ist abgeschlossen und beschränkt

13.1 Beispiel 6.3

Sei $M = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) | x \in \mathbb{R},\ x > 0 \right\}$
Behauptung: $(0,0)$ ist Randpunkt von M.
Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. $(0,0) \in K_\epsilon(0,0)$ und $(0,0) \notin M$
Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $\left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot n}, \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\cdot\pi\cdot n}} \right) \right) = \left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot n}, 0 \right)$ Element von M.
Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\cdot\pi\cdot n} = 0$ kann man n so wählen, dass $\left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot n}, 0 \right) \in K_\epsilon(0,0)$ gilt.

14 Extrema

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei p innerer Punkt von D.
f hat in p ein lokales oder relatives $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$\left\{\begin{array}{l} f(x) \le f(p) \\ f(x) \ge f(p) \end{array}\right\}$ für jedes $x \in K_\epsilon(p)$ gilt.
Wie bestimmt man solche Stellen, wenn f zweimal stetig differenzierbar im Fall $n = 1$, bzw. zweimal partiell differenzierbar im Fall $n = 2$ ist?
Wenn f in p ein lokales Extremum hat gilt:

	$n = 1$	$n = 2$
	$f'(p) = 0$	$(grad(f))(p) = ((\partial_1 f)(p), (\partial_2 f)(p)) = (0,0)$
f hat in p ein lokales $\begin{array}{c}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{array}$, wenn	$f'(p) = 0$ und $f''(p) = \left\{\begin{array}{l} < 0 \\ > 0 \end{array}\right.$	$(grad(f))(p) = (0,0)$ und $H_f(p) = \begin{pmatrix} (\partial_1(\partial_1))(p) & (\partial_2(\partial_1))(p) \\ (\partial_1(\partial_2))(p) & (\partial_2(\partial_2))(p) \end{pmatrix}$ negativ definit / positiv definit
?, wenn	$f'(p) = 0$ und $f''(p) = 0$	$(grad(f))(p) = (0,0)$ und $H_f(p)$ semidefinit
Sattelpunkt	–	$(grad(f))(p) = (0,0)$ und $H_f(p)$ indefinit

14.1 Beispiel 7.37

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^4 + y^4 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot y^2 + 4 \cdot x \cdot y$

a) Bestimme alle Stellen, an denen f ein lokales Extremum hat.
Lösung:

$$\ldots (grad(f))(0,0) = (0,0),\ H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$f(x,x) = 2 \cdot x^4 > 0$ falls $x \neq 0$
$f(x,-x) = x^4 + x^4 - 2x^2 - 2x^2 - 4x^2 = 2x(x^2 - 4) < 0$ für genügend kleines $x \neq 0$
Für beliebiges $\epsilon > 0$ liegen in $K_\epsilon(0,0)$ sowohl Elemente (x_1, y_1) mit $f(x_1, y_1) > f(0,0)$, als auch Elemente (x_2, y_2) mit $f(x_2, y_2) < f(0,0)$. f hat also in $(0,0)$ kein lokales Extremum.

b) Warum gibt es $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a^2 + b^2 = 1$, so dass $f(x,y) \le f(a,b)$ für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 \le 1$ gilt.

14.2

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ferner sei $p \in D$.
f hat in p ein globales oder absolutes $\left\{\begin{array}{c}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{array}\right\}$, wenn für jedes $x \in D$ gilt

$\left\{\begin{array}{l} f(x) \le f(p) \\ f(x) \ge f(p) \end{array}\right.$.

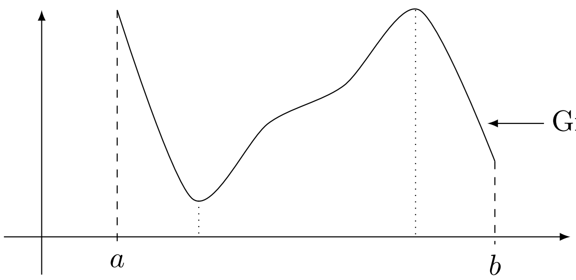
14.3 Satz vom Maximum und Minimum (Satz von Weierstraß)

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $p, q \in D$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ für jedes $x \in D$.

14.4

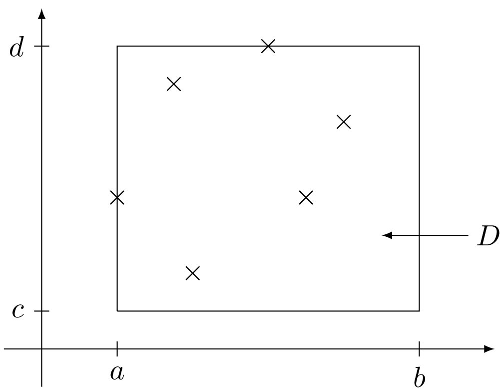
Wie bestimmt man größten bzw. kleinsten Funktionswert einer differenzierbaren Funktion f auf einer kompakten Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$?

$n = 1$



Man bestimmt alle $p \in]a, b[$ mit $f'(p) = 0$ und dazu $f(a)$ und $f(b)$.

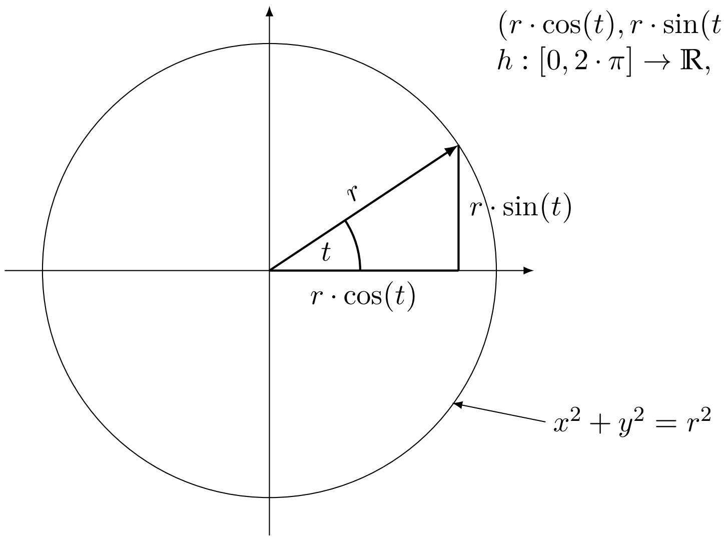
$n = 2$



Hat f in einem inneren Punkt von D ein globales Extremum, so hat f dort auch ein lokales Extremum. Der Gradient von f in diesem Punkt ist also 0. Bestimme also alle inneren Punkte p von D mit $(grad(f))(p) = 0$. Prüfe die Möglichkeiten auf dem Rand von D:

$$
\begin{aligned}
&(x, c), a \leq x \leq b \\
&f(x, c), a \leq x \leq b \\
&h_1 : [a, b] \to \mathbb{R},\ h_1(x) = f(x, c) \\
&h_2 : [a, b] \to \mathbb{R},\ h_2(x) = f(x, d) \\
&h_3 : [c, d] \to \mathbb{R},\ h_3(y) = f(a, y) \\
&h_4 : [c, d] \to \mathbb{R},\ h_4(y) = f(b, y)
\end{aligned}
$$

$(r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t)),\ 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$
$h : [0, 2 \cdot \pi] \to \mathbb{R},\ h(t) = f(r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))$



14.5 Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $f(0) > 0$.

Zeige: $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \int\limits_0^{x^2} f(t)\ dt$ hat bei 0 ein lokales Minimum.

Lösung:

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(y) = \int\limits_0^{y} f(t)\ dt$ ist differenzierbar, und es ist $h'(y) = f(y)$ (f ist stetig)

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$ ist differenzierbar, und es ist $g'(x) = 2 \cdot x$

$$(h \circ g)(x) = h(x^2) = \int\limits_0^{x^2} f(t)\ dt = F(x) \quad g, h \text{ differenzierbar}$$

$\Rightarrow F$ differenzierbar und es ist

$$\begin{aligned} F'(x) &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f(x^2) \cdot 2 \cdot x \end{aligned}$$

Da f stetig differenzierbar ist, ist F zweimal stetig differenzierbar, und es ist
$F''(x) = f'(x^2) \cdot 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot f(x^2)$

Man erhält $\left.\begin{array}{l} F'(0) = 0 \\ F''(0) = 2 \cdot f(0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Behauptung.

14.6 Aufgabe

Bestimme alle stetigen Funktionen $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(x) = \int\limits_1^x \frac{f(t)}{t} dt + \frac{x^2 - 1}{2} \text{ für jedes } x \in]0, \infty[.$$

Lösung:
f habe die gewünschte Eigenschaft.
Da f stetig ist, ist f differenzierbar, und es ist $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + x$
f ist also Lösung des Anfangswertproblems $\begin{cases} y' = \frac{1}{x} \cdot y + x, \ x > 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

15 Basiswechsel

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $(v_1, \ldots, v_m)$ und $(v'_1, \ldots, v'_m)$ seien Basen von V. Schreibe v'_j in er Form

$$v_j = s_{1j} \cdot v_j + s_{2j} \cdot v_2 + \ldots + s_{mj} \cdot v_m \text{ mit } s_{ij} \in K.$$

Die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} & s_{1j} & \\ & \vdots & \\ & s_{mj} & \end{pmatrix}$$

nennt man die Übergangsmatrix von $(v_1, \ldots, v_m)$ zu $(v'_1, \ldots, v'_m)$.

15.1 Beispiele

1. $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_4}\Bigg)$$

$$\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v'_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v'_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v'_4}\Bigg)$$

Bestimme die Übergangsmatrix S von $(v_1, \ldots, v_4)$ zu $(v'_1, \ldots, v'_4)$.

$$\left.\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sei $V = \mathbb{R}^2$

$$\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}\Bigg) \qquad \Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v'_2}\Bigg)$$

Bestimme die Übergangsmatrix T von (v_1, v_2) zu (v_1', v_2')

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} &= -2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = \begin{pmatrix}0 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+c+d\\a+d\end{pmatrix}$

Bestimme die Matrix M von f bzgl. obiger Basen $(v_1, \ldots, v_4)$ und $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$$\left.\begin{aligned} f\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow M = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Bestimme die Matrix M' von f bzgl. $(v_1', \ldots, v_4')$ und $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$$\left.\begin{aligned} f\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & V & \xrightarrow[\text{linear}]{f} & W & & & \\ S & \begin{matrix}(v_1, \ldots, v_m)\\(v_1', \ldots, v_m')\end{matrix} & & \begin{matrix}(w_1, \ldots, w_n)\\(w_1', \ldots, w_n')\end{matrix} & T & \begin{matrix}M\\M'\end{matrix} & \longleftarrow \text{Darstellende Matrizen} \\ \uparrow & & & & \uparrow & & \\ \text{Übergangsmatrix} & & \text{Basen} & & \text{Übergangsmatrix} & & \end{array}$$

Es gilt $M' = T^{-1} \cdot M \cdot S$ (Basiswechselformel)
Übergangsmatrizen sind invertierbar.

Wenn V ein euklidischer Vektorraum ist und $(v_1, \dots, v_m)$ und $(v'_1, \dots, v'_m)$ Orthonormalbasen von V sind, so ist die Übergangsmatrix von $(v_1, \dots, v_m)$ zu $(v'_1, \dots, v'_m)$ orthogonal.
Sei $(b_1, \dots, b_m)$ eine Basis des K^m. Die Übergangsmatrix von $(e_1, \dots, e_m)$ zu $(b_1, \dots, b_m)$ ist die Matrix mit den Spalten $b_1, \dots, b_m$.

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $f : V \to V$ linear.
$(v_1, \dots, v_m)$ und $(v'_1, \dots, v'_m)$ seien Orthonormalbasen von V.
M bzw. M' sei die Matrix von f bzgl. $(v_1, \dots, v_m)$ bzw. $(v'_1, \dots, v'_m)$. Dann gilt:

1. M orthogonal $\Rightarrow M'$ orthogonal
2. M symmetrisch $\Rightarrow M'$ symmetrisch

Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear, $f(x) = A \cdot x$ für jedes $x \in \mathbb{R}^m$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.
f abstandstreu $\Leftrightarrow A$ ist orthogonal.
Sei f abstandstreu

1. Fall: $n = 2$. Dann gilt $det(A) = 1$ oder $det(A) = -1$.
   a) $det(A) = 1$. Dann gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
   f ist die Drehung um 0, Drehwinkel α.
   b) $det(A) = -1$. Dann gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.
   f ist die Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$.
2. Fall: $n = 3$.
   a) $det(A) = 1$. Dann ist 1 Eigenwert von A.
   Sei (b_1, b_2, b_3) Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, wobei b_3 Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 ist. Die Matrix M von f bzgl. (b_1, b_2, b_3) ist orthogonal, es ist $det(M) = 1$, also hat M die Form

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   f ist Drehung, Drehachse: $\mathbb{R} \cdot b_3$.
   Für den Cosinus $\cos\alpha$ des Drehwinkels gilt
   $1 + 2 \cdot \cos\alpha = Spur(M) \underset{\text{ähnlich}}{\overset{M \text{ und } A}{=}} Spur(A)$
   also $\cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot (Spur(A) - 1)$

   Spezialfall: A symmetrisch.
   Dann ist auch M symmetrisch, es ist also $\sin\alpha = 0$.

Daher $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dann ist $f = \mathrm{id}$

Oder $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dann ist f die Drehung um $\mathbb{R} \cdot b_3$, Drehwinkel π und zugleich Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot b_3$.

b) $det(A) = -1$. Dann ist -1 Eigenwert von A
Sei (b_1, b_2, b_3) eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ mit $b_3 \in Eig(A, -1)$.
Die Matrix M von f bzgl. (b_1, b_2, b_3) hat dann die Form

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

f ist daher eine Drehung um die Gerade $\mathbb{R} \cdot b_3$ gefolgt von der Spiegelung an der Ebene $\mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2$. f ist eine Drehspiegelung. Dabei ist $2 \cdot \cos\alpha - 1 = Spur(M) = Spur(A)$, also $\cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot (Spur(A) + 1)$

Spezialfall: A symmetrisch.
Dann ist auch M symmetrisch, es ist also $\sin\alpha = 0$ und $\cos^2\alpha = 1$.
Wenn $\cos\alpha = 1$ ist, ist $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
f ist folglich die Spiegelung an der Ebene $\mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2$.
Wenn $\cos\alpha = -1$ ist, ist $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
f ist folglich die Spiegelung am Nullpunkt.

16 Vektorraum

(V, σ) heißt euklidischer Vektorraum $\Leftrightarrow$

1. V ist ein reeller Vektorraum

2. $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform (ein Skalarprodukt), d. h.:

   a) σ ist linear in beiden Argumenten, d. h.:
   Für alle $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

   $$\begin{matrix} \sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y) \\ \sigma(\lambda \cdot x, y) = \lambda \cdot \sigma(x, y) \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2) \\ \sigma(x, \mu \cdot y) = \mu \cdot \sigma(x, y) \end{matrix}$$

   b) σ ist symmetrisch, d. h.: Für alle $x, y \in V$ ist $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$

c) Für jedes $x \in V$ mit $x \neq 0$ ist $\sigma(x,x) > 0$

Sei (V,σ) euklidischer Vektorraum, $x \in V$

$$\|x\| = \sqrt{\sigma(x,x)}$$

$x, y \in V \setminus \{0\}$

$$\measuredangle(x,y) = \arccos \frac{\sigma(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$$x \perp y \Leftrightarrow \sigma(x,y) = 0$$

Spezialfall: $V = \mathbb{R}^n$
$\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ ist Skalarprodukt $\Leftrightarrow$
Es gibt eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\sigma(x,y) = x^T \cdot A \cdot y$ für alle $x, y \in V$.

16.1 Beispiel

$n = 2$
$\sigma(x,y) = x^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot y$
Länge von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^2, \sigma)$:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \sigma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \not\perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

16.2 Beispiel 6.13

Bestimme ein Skalarprodukt σ auf $\mathbb{R}^2$, so dass $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ ist.

<u>Lösung:</u> Gesucht $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\sigma(x,y) = x^T \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ die gewünschten Eigenschaften hat. Bedingungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

16.3 Beispiel 6.15

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. $Rang(A) = n$. B positiv definit.
Zeige, dass $\Sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \sigma(x, y) = x^T \cdot A \cdot B \cdot A \cdot y$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ ist.
Lösung: Wegen $(A \cdot B \cdot A)^T = A^T \cdot B^T \cdot A^T = A \cdot B \cdot A$
Noch zu zeigen: $x \neq 0 \Rightarrow x^T \cdot A \cdot B \cdot A \cdot x > 0$.
Sei $x \neq 0$

$$\left.\begin{array}{r} x^T \cdot A \cdot B \cdot A \cdot x = (A \cdot x)^T \cdot B \cdot (A \cdot x) \\ x \neq 0 \underset{Rang(A)=n}{\Longrightarrow} A \cdot x \neq 0 \end{array}\right\} \overset{B \text{ positiv}}{\underset{\text{definit}}{\Longrightarrow}} (A \cdot x)^T \cdot B \cdot (A \cdot x) > 0$$

16.4

Sei L ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$. $L = a + \mathbb{R} \cdot u_1 + \ldots + \mathbb{R} \cdot u_d$ sei die Parameterdarstellung für L. Sei ferner $p \in \mathbb{R}^n$.
Fälle das Lot von p auf L, Lotfußpunkt sei $\overline{p}$.
Bedingungen für $\overline{p}$:

1. $\overline{p} \in L$, d. h. es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ mit $\overline{p} = a + \lambda_1 \cdot u_1 + \ldots + \lambda_d \cdot u_d$
2. $(\overline{p} - p) \perp L$, d. h. $(\overline{p} - p) \perp u_1, \ldots, (\overline{p} - p) \perp u_d$

16.5 Beispiel 6.18

Sei $W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$
Berechne eine Orthonormalbasis (b_1, b_2) von W.
Bestimme für $p \in \mathbb{R}^4$ den Lotfußpunkt $\overline{p} \in W$ wie eben.
Wegen $W = \mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2$ gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\overline{p} = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2$.

$$(\overline{p} - p) \perp b_1 \Leftrightarrow (\overline{p} - p) \circ b_1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 - p) \circ b_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot (b_1 \circ b_1) + \lambda_2 \cdot (b_2 \circ b_1) - (p \circ b_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = p \circ b_1$$

$$(\overline{p} - p) \perp b_2 \Leftrightarrow (\overline{p} - p) \circ b_2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 - p) \circ b_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot (b_1 \circ b_2) + \lambda_2 \cdot (b_2 \circ b_2) - (p \circ b_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = p \circ b_2$$

Also: $\overline{p} = (p \circ b_1) \cdot b_1 + (p \circ b_2) \cdot b_2$

16.6

Sei L wie oben. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei die Spiegelung an L.
Wie bestimmt man zu $p \in \mathbb{R}^n$ das Bild $f(p)$?
Man fällt das Lot von f auf L. $\overline{p}$ sei der Lotfußpunkt.
Dann ist $f(p) = p + 2 \cdot (\overline{p} - p) = 2 \cdot \overline{p} - p$.

Wenn L eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ ist geht's einfacher.
Es gibt dann nämlich $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R},\ (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ mit

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n = b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \right\}$$

16.7

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor von L.
Fälle das Lot von $p \in \mathbb{R}^n$ auf L. $\overline{p}$ sei wieder der Lotfußpunkt.

Wegen $(\overline{p} - p) \perp L$ gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\overline{p} = p + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
λ ist so zu bestimmen, dass $\overline{p}$ die Gleichung $a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$ erfüllt.

16.8 Beispiel 6.31

Sei $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung um $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Drehwinkel $\frac{\pi}{3}$.

Bestimme eine Orthonormalbasis (b_1, b_2, b_3) des $\mathbb{R}^3$, so dass $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
die Matrix von d bezüglich (b_1, b_2, b_3) ist.

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d(b_3) = b_3 = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3$$

b_1, b_2 willkürlich, so dass (b_1, b_2, b_3) Orthonormalbasis ist.

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17 Lineare Abbildungen

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.
f linear $\Leftrightarrow$ Es gibt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $f(x) = A \cdot x$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.
f affin $\Leftrightarrow$ Es gibt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $t \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = A \cdot x + t$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.
A und t sind dabei eindeutig bestimmt ($t = f(0)$).

17.1 Aufgabe

Gegeben $p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2$. $(p_1 - p_0, p_2 - p_0)$ sei linear unabhängig.
Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$f(p_0) = q_0,\ f(p_1) = q_1,\ f(p_2) = q_2$.
Wenn f die gewünschten Eigenschaften hat, gibt es $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $t \in \mathbb{R}^2$, so dass $f(x) = A \cdot x + t$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ gilt, also insbesondere

$$\begin{aligned} A \cdot p_0 + t &= q_0 \\ A \cdot p_1 + t &= q_1 \\ A \cdot p_2 + t &= q_2 \end{aligned}$$

und damit $A \cdot (p_1 - p_0) = q_1 - q_0$ und $A \cdot (p_2 - p_0) = q_2 - q_0$.
Folglich $A \cdot \underbrace{(p_1 - p_0, p_2 - p_0)}_{\text{invertierbar}} = (q_1 - q_0, q_2 - q_0)$ also
$A = (q_1 - q_0, q_2 - q_0) \cdot (p_1 - p_0, p_2 - p_0)^{-1}$. Dann ist $t = q_0 - A \cdot p_0$.

17.2 Spezielle affine Abbildungen

Seien f, A und t wie oben. f ist abstandstreu (Bewegung, Isometrie, Kongruenzabbildung) $\Leftrightarrow$ A ist orthogonal.
Sei $n = 2,\ A$ **sei orthogonal**

1. Fall: $A = E$.
   Dann ist f eine Translation.

2. Fall: $A \neq E$.
   a) $det(A) = 1$. Dann hat A die Form

   $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

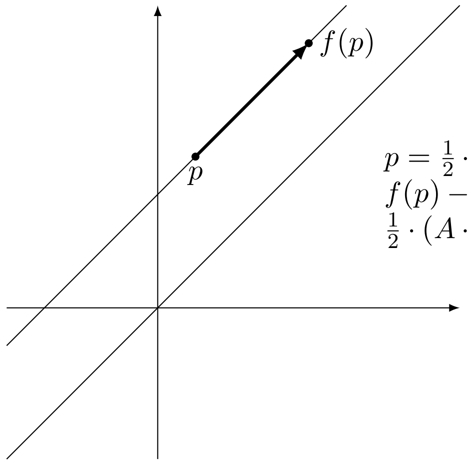
   f hat genau einen Fixpunkt z, denn die Gleichung $f(z) = z$, also $A \cdot z + t = z$, also $(A - E) \cdot z = -t$ hat wegen

   $$det(A - E) = det \begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - 1 \end{pmatrix} = (\cos\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha \neq 0$$

   genau eine Lösung z.
   Man erhält $A \cdot x + t = z$, also $t = z - A \cdot z$.

Es ist also $f(x) = A \cdot x + z - A \cdot z$, also $f(x) - z = A \cdot (x - z)$ für jedes x. f ist also eine Drehung um z.

b) $det(A) = -1$. A hat Eigenwert 1. Sei u Eigenvektor von A zum Eigenwert 1. Dann ist f die Zusammensetzung der Spiegelung an der Geraden $\frac{1}{2} \cdot t + \mathbb{R} \cdot u$ und der Translation um $\frac{1}{2} \cdot f(t)$. f ist also eine Gleitspiegelung (Spiegelung an einer Geraden und anschließende Parallelverschiebung in Richtung dieser Geraden).



$$p = \tfrac{1}{2} \cdot t, \;\; f(p) = A \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot t) + t$$
$$f(p) - p = \tfrac{1}{2} \cdot A \cdot t + t - \tfrac{1}{2} \cdot t$$
$$\tfrac{1}{2} \cdot (A \cdot t + t) = \tfrac{1}{2} \cdot f(t)$$

Sei V ein Vektorraum, U, W seien Untervektorräume von V und seien $a, b \in V$. Dann gilt:

$$a + U = b + W \Leftrightarrow U = W \text{ und } a - b \in U (= W)$$

17.3 Aufgabe

Bestimme $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass $Kern(l_A) \subsetneq Bild(l_A) \subsetneq \mathbb{R}^4$ ist.

$$\begin{aligned} e_1 &\mapsto 0 \\ e_2 &\mapsto e_1 \\ e_3 &\mapsto e_3 \\ e_4 &\mapsto e_4 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17.4

V, W seien K-Vektorräume, $f : V \to W$ sei linear.

$$\begin{aligned} Kern(f) &= \{v \in V \mid f(v) = 0\} \\ Bild(f) &= \{w \in W \mid \text{ Es gibt } v \in V \text{ mit } w = f(v)\} \\ &= \{f(v) \mid v \in V\} \end{aligned}$$

$$dim(V) < \infty \Leftrightarrow dim(V) = dim(Kern(f)) + dim(Bild(f))$$

f injektiv $\Leftrightarrow Kern(f) = \{0\}$
f surjektiv $\Leftrightarrow Bild(f) = W$

Behauptung: Ist $dim(V) = dim(W) < \infty$, so gilt:

$$f \text{ injektiv } \Leftrightarrow f \text{ surjektiv } \Leftrightarrow f \text{ bijektiv}$$

Beweis: Dimensionsformel:

$$f \text{ injektiv } \Rightarrow Kern(f) = 0 \Rightarrow dim(Bild(f)) = dim(V) = dim(W) \Rightarrow Bild(f) = W \Rightarrow f \text{ surjektiv}$$

usw.

Frage: Gibt es injektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$?
Antwort: Nein, denn es müsste gelten

$$4 = dim(\mathbb{R}^4) = dim(Kern(f)) + \underbrace{dim(Bild(f))}_{\leq 3}$$

Frage: Gibt es eine surjektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$?
Antwort: Nein, denn es müsste gelten

$$3 = dim(\mathbb{R}^3) = \underbrace{dim(Kern(f))}_{\geq 0} + \underbrace{dim(Bild(f))}_{\leq 3}$$

17.5

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. $f : V \to K$ sei linear.
$dim_K K = 1$. $Bild(f)$ ist Untervektorraum von K. Daher

$$Bild(f) = \{0\} \text{ d. h. } f = 0 \text{ oder } Bild(f) = K.$$

17.6 Aufgabe 5.28

V sei $\{a_3 \cdot X^3 + a_2 \cdot X^2 + a_1 \cdot X + a_0 \mid a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{R}\}$
V ist 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

a) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_c : V \to \mathbb{R},\ \varphi_c(p(x)) = p(c)$ linear.

b) Bestimme die Dimension des Untervektorraums $U := \{p(x) \in V \mid p(c) = 0\}$
Lösung: $U = Kern(\varphi_c)$

$$\varphi_c(0 \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 1) = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \varphi_c \neq 0 \Rightarrow Bild(\varphi_c) = \mathbb{R} \Rightarrow dim(Kern(\varphi_c)) = 4 - 1 = 3$$

17.7 Aufgabe 4.22

Gegeben seien $s_1, \dots, s_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. $U : \mathbb{R} \cdot s_1 + \dots + \mathbb{R} \cdot s_{n-1}$
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = det(s_1, \dots, s_{n-1}, x)$ ist linear.

a) **Behauptung:** $U \subseteq Kern(f)$
Beweis: Für $j \in \{1, \dots, n-1\}$ ist $f(s_j) = det(s_1, \dots, s_{n-1}, s_j) = 0$ also $s_j \in Kern(f)$. Daher $U \subseteq Kern(f)$.

b) Bestimme $dim(Kern(f))$ in Abhängigkeit von $dim(U)$.

1. Fall: $dim(U) < n - 1$.
Dann sind $s_1, \dots, s_{n-1}$ linear abhängig, es ist also
$f(x) = det(s_1, \dots, s_{n-1}, x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, also $dim(Kern(f)) = n$.
2. Fall: $dim(U) = n - 1$.
Dann sind $s_1, \dots, s_{n-1}$ linear unabhängig, es gibt daher $s_n \in \mathbb{R}^n$, so dass $(s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist. Man erhält $f(s_n) \neq 0$, also $f \neq 0$, also $Bild(f) \neq \{0\}$, also $Bild(f) = \mathbb{R}$, also
$dim(Kern(f)) = dim(\mathbb{R}^n) - dim(Bild(f)) = n - 1$

17.8 Aufgabe 5.39

V sein ein K-Vektorraum, $dim(V) < \infty$
$f : V \to V$ linear.

a) **Behauptung:** $Kern(f) \cap Bild(f) = \{0\} \Rightarrow V = Kern(f) \oplus Bild(f)$
Beweis:

$$dim(Kern(f) + Bild(f)) =$$
$$= dim(Kern(f)) + dim(Bild(f)) - \underbrace{dim(Kern(f) \cap Bild(f))}_{=0} =$$
$$= dim(V) \Rightarrow V = Kern(f) + Bild(f)$$
$$\Big[dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)\Big]$$

b) **Behauptung:** Ist $f \circ f = f$ so gilt:

i) $Bild(f) = Fix(f) := \{v \in V \mid f(v) = v\}$
ii) $V = Kern(f) \oplus Bild(f)$

Beweis:

i) „$\supseteq$“ $v \in Fix(f) \Rightarrow v = f(v) \in Bild(f)$
„$\subseteq$“ $v \in Bild(f) \Rightarrow$ Es gibt $w \in V$ mit $v = f(w)$.
Man erhält $f(v) = f(w) \underset{f \circ f = f}{=} f(w) = v$, also $v \in Fix(f)$.

ii) $v \in Kern(f) \cap Bild(f) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} v \in Bild(f) \overset{\text{i)}}{\Rightarrow} f(v) = v \\ v \in Kern(f) \Rightarrow f(v) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v = 0.$