# Mathematik 1

## Aufgabe 1: (5 Punkte)

Ermitteln Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge G= $\mathbb{R}$:

$$(2\cdot x+5)^2+(3\cdot x+4)^2-(13\cdot x+2)\cdot(x+1)=2\cdot(14\cdot x+15)$$

---

$$\begin{aligned}
(2\cdot x+5)\cdot(2\cdot x+5)+(3\cdot x+4)\cdot(3\cdot x+4)-(13\cdot x+2)\cdot(x+1)&=2\cdot(14\cdot x+15)\\
4\cdot x^2+10\cdot x+10\cdot x+25+9\cdot x^2+12\cdot x+12\cdot x+16-(13\cdot x^2+13\cdot x+2\cdot x+2)&=28\cdot x+30\\
13\cdot x^2+44\cdot x+41-13\cdot x^2-15\cdot x-2&=28\cdot x+30\\
29\cdot x+39&=28\cdot x+30\\
x&=-9
\end{aligned}$$

$L=\{-9\}$

## Aufgabe 2: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge G= $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2+4\cdot x}{x^2-4}-\frac{x+1}{x-2}=\frac{3}{4\cdot x-8}$$

---

Zuerst der Definitionsbereich. Das ist die ganze Grundmenge ohne die Lösungen der Gleichungen $x^2-4=0$, $x-2=0$ und $4\cdot x-8=0$. Hier sind die Lösungen in gleicher Reihenfolge 2 und $-2$, 2 und 2. Insgesamt also $D=\mathbb{R}\setminus\{2,\ -2\}$.
Dann die Lösungsmenge.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+4\cdot x}{x^2-4}-\frac{x+1}{x-2}&=\frac{3}{4\cdot x-8}\\
\frac{x^2+4\cdot x}{x^2-4}-\frac{(x+1)\cdot(x+2)}{x^2-4}&=\frac{3}{4\cdot x-8} \qquad \text{mit } (x^2-4)=(x+2)\cdot(x-2)\\
\frac{x^2+4\cdot x-x^2-3\cdot x-2}{x^2-4}&=\frac{3}{4\cdot x-8}\\
\frac{x-2}{x^2-4}&=\frac{3}{4\cdot x-8}\\
\frac{1}{x+2}&=\frac{3}{4\cdot x-8}\\
4\cdot x-8&=3\cdot x+6\\
x&=14
\end{aligned}$$

$L=\{14\}$

## Aufgabe 3: (6 Punkte)

Ermitteln Sie die Definitions- und Lösungsmenge folgender Ungleichung in der Grundmenge G= $\mathbb{R}$:

$$\frac{x+2}{3-x}\le 0$$

---

Definitionsmenge $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.
Für die Bestimmung der Lösungsmenge hat die Ungleichung schon eine geeignete Form. Es gilt herauszufinden in welchem Wertebereich von $x$ die Ungleichung erfüllt ist. Dazu betrachtet man die Nullstellen der einzelnen Faktoren $x+2$ und $3-x$, sie sind in gleicher Reihenfolge $-2$ und 3. Das motiviert eine Tabelle zur Betrachtung der Vorzeichen:

| | | $-2$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $3-x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\frac{x+2}{3-x}$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |

Damit nimmt der Bruch für $x$-Werte kleiner $-2$ und $x$-Werte größer 3 negative Werte an. Zwischen $-2$ und 3 ist sein Wert positiv. Die Ungleichung hat als Vergleichszeichen kleinergleich, es sind also noch die Ränder zu betrachten. Für $x = -2$ nimmt der Bruch den Wert Null an, das erfüllt also die Ungleichung. Für $x = 3$ ist der Wert nicht definiert, denn 3 wurde im Definitionsbereich ausgeschlossen. Zusammen ergibt sich also $x \in (-\infty, -2]$ oder $x \in (3,\ \infty)$. Als Mengenschreibweise: $L = \{x \in \mathbb{R} | -\infty \leq x \leq -2 \cup x > 3\}$

## Aufgabe 4: (6 Punkte)

Lösen Sie folgende Formeln nach der angegebenen Größe auf:

4.1 $p = \dfrac{m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2}{m_1 + m_2}$ $\qquad m_1 =?$

4.2 $T = \left(\dfrac{h}{v_1} + \dfrac{h}{v_2}\right) \cdot \dfrac{b}{s}$ $\qquad h =?$

---

4.1

$$\begin{aligned} p &= \frac{m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2}{m_1 + m_2} \\ p \cdot (m_1 + m_2) &= m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 \\ m_1 \cdot p + m_2 \cdot p &= m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 \\ m_1 \cdot p - m_1 \cdot p_1 &= m_2 \cdot p_2 - m_2 \cdot p \\ m_1 \cdot (p - p_1) &= m_2 \cdot (p_2 - p) \\ m_1 &= \frac{m_2 \cdot (p_2 - p)}{p - p_1} \end{aligned}$$

4.2

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{h}{v_1} + \frac{h}{v_2}\right) \cdot \frac{b}{s} \\ \frac{T \cdot s}{b} &= \frac{h \cdot v_2 + h \cdot v_1}{v_1 \cdot v_2} \\ \frac{T \cdot s \cdot v_1 \cdot v_2}{b} &= h \cdot (v_2 + v_1) \\ \frac{T \cdot s \cdot v_1 \cdot v_2}{b \cdot (v_2 + v_1)} &= h \end{aligned}$$

## Aufgabe 5: (9 Punkte)

In das Dreieck $ABC$ mit $a = 9$ cm, $b = 12$ cm und $\gamma = 90°$ ist das Rechteck $CDEF$ so einbeschrieben, dass der Eckpunkt $E$ auf der Dreiecksseite $[AB]$ liegt und $\overline{CD} : \overline{CF} = 2 : 1$ gilt. Dabei sollen $D$ auf $[AC]$ und $F$ auf $[BC]$ liegen.

5.1 Berechnen Sie die Höhe des Dreiecks $ABC$.

5.2 Berechnen Sie die Seiten des einbeschriebenen Rechtecks.

5.1 Mit Höhe ist hier vermutlich die Höhe auf die Dreiecksseite $c$, also $h_c$ gemeint. Um sie zu berechnen berechnet man zunächst mit dem Pythagoras die Länge der dritte Dreiecksseite $c$. Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$. Die Höhe $h_c = \frac{a \cdot b}{c} = \frac{9 \cdot 12}{15} = 7,2$. Die Länge der Höhe auf $c$ beträgt $7,2$ cm.

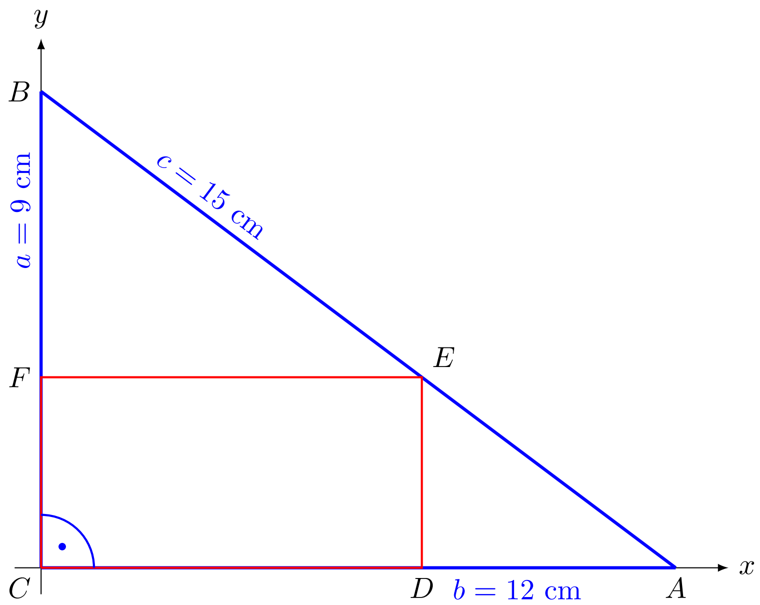
5.2 Legt man das Dreieck $ABC$ so in ein Koordinatensystem, dass $C$ im Ursprung, $A$ bei $(12|0)$ und $B$ bei $(0|9)$ liegen, kann man die Dreiecksseite $c$, also die Gerade $[AB]$ als Gerade auffassen und deren Funktion bestimmen. Sie lautet $y = -\frac{9}{12} \cdot x + 9$ oder gekürzt $y = -\frac{3}{4} \cdot x + 9$.
Der Rechteckpunkt $E$ liegt auf der Dreiecksseite $c$ also auf dieser Geraden. Weil Der Rechteckpunkt $D$ auf der Dreiecksseite $b$ liegt, ist also die Rechteckseite $[CD]$ auf der $x$-Achse. Weil Der Rechteckpunkt $F$ auf der Dreiecksseite $a$ liegt, ist also die Rechteckseite $[FC]$ auf der $y$-Achse. Der Punkt $E$ bildet also das rechte obere Eck des Rechtecks und ausserdem haben seine Koordinaten auch das Teilerverhältnis der Rechteckseiten $\overline{CD} : \overline{CF} = 2 : 1$. Die $x$-Koordinate von $E$ ist das Doppelte der $y$-Koordinate von $E$. Man kann $E$ schreiben als $(2y|y)$ oder auch als $(x|\frac{1}{2} \cdot x)$. Weil $E$ auf der Geraden durch $A$ und $B$ liegt, kann man ihn in deren Geradengleichung einsetzten, in $y$ wird $\frac{1}{2} \cdot x$ und in $x$ $x$ selber eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot x &= -\frac{3}{4} \cdot x + 9 \\
-9 &= -\frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x \\
9 &= \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) \cdot x \\
9 &= \frac{5}{4} \cdot x \\
x &= \frac{36}{5} = 7,2
\end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert von $x$ wieder in die Geradengleichung, so erhält man den $y$-Wert von $E$:

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{36}{5} + 9 \\
y &= -\frac{108}{20} + \frac{180}{20} \\
y &= \frac{72}{20} = \frac{18}{5} = 3,6
\end{aligned}$$

$E$ hat also die Koordinaten $(7,2|3,6)$ und man erkennt, dass die $x$-Koordinate das Doppelte der $y$-Koordinate ist. Die zu berechnenden Seiten sind also $[CD] = 7,2$ cm, $[DE] = 6,3$ cm, $[EF] = 7,2$ cm und $[FC] = 6,3$ cm.



**Aufgabe 6:** (8 Punkte)

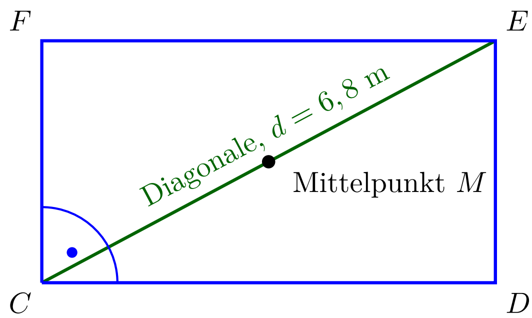
Die Grundfläche eines Turmes ist ein Rechteck mit der Länge $l = 6,0$ m und der Breite $b = 3,2$ m. Sei Dach hat die Form einer geraden Pyramide; die Dachhöhe beträgt $h = 5,0$ m.

6.1 Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie die Länge der Seitenkante des Daches.

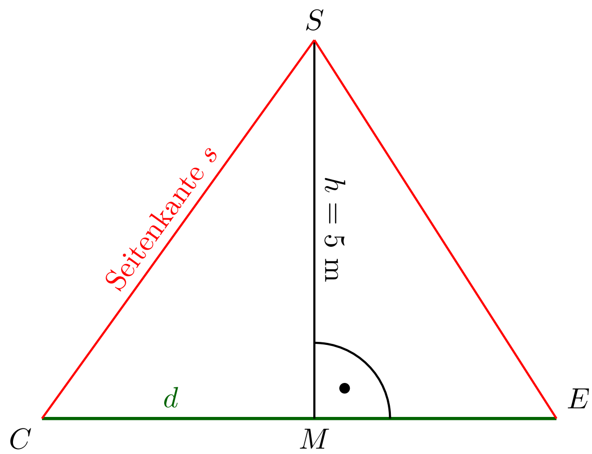
6.2 Berechnen Sie, wie viele Quadratmeter Blech zur Eindeckung des Turmdachs notwendig sind, wenn 10% Verschnitt gerechnet werden muss.

---

6.1 Da die Pyramidenspitze genau über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt bietet sich sowohl eine Skizze der Grundfläche als auch eine Skizze der der Pyramide, geschnitten an der Diagonalen der Grundfläche, an. Die Diagonalenlänge $d$ lässt sich mit dem Pythagoras berechnen: $d^2 = l^2 + b^2$ woraus folgt $d = \sqrt{l^2 + b^2} = \sqrt{46,24} = 6,8$. Zunächst die Grundfläche:




Und der Schnitt durch die Pyramide entlang der Diagonalen:




Wendet man nochmals den Pythagoras an kann man die Seitenkante $s$ berechnen. $s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$, $s = \sqrt{3,4^2 + 5^2} = \sqrt{36,56} \approx 6$. Die Länge der Seitenkante beträgt ungefähr 6 m.

6.2 Die Dachfläche setzt sich aus vier Dreiecken $CDS$, $DES$, $EFS$ und $FCS$ zusammen von denen jeweils zwei gegenüberliegende Dreiecke gleich groß sind. Jedes dieser Dreiecke wird durch zwei Seitenkanten des Daches und der Grundseite, einer Seite der Grundfläche, begrenzt. Es sind also alle drei Seitenlängen bekannt so dass mit dem Satz des Heron die Fläche berechnet werden kann. Die Fläche $F$ ist allgemein

$$F = \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \left(\frac{u}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{u}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{u}{2} - c\right)}$$

wobei $u$ der Umfang des Dreiecks ist.
Für das Dreieck $CDS$ ist der Umfang $u = 2 \cdot s + \overline{CD} = 2 \cdot 6 + 6 = 18$. Die Dreiecksseiten $a$, $b$ und $c$ können

beliebig zugeordnet werden. Hier ist $a = s,\ b = s$ und $c = \overline{CD}$. Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
F_{CDS} &= \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \left(\frac{u}{2} - s\right) \cdot \left(\frac{u}{2} - s\right) \cdot \left(\frac{u}{2} - \overline{CD}\right)} \\
F_{CDS} &= \sqrt{9 \cdot (9-6) \cdot (9-6) \cdot (9-6)} \\
F_{CDS} &= \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \\
F_{CDS} &= \sqrt{243} \\
F_{CDS} &\approx 15,6
\end{aligned}
$$

eine Fläche von ungefähr 15,6 $\text{m}^2$.
Für das Dreieck $DES$ ist der Umfang $u = 2 \cdot s + \overline{DE} = 2 \cdot 6 + 3,2 = 15,2$. Die Dreiecksseiten $a,\ b$ und $c$ können wieder beliebig zugeordnet werden. Hier ist $a = s,\ b = s$ und $c = \overline{DE}$. Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
F_{DES} &= \sqrt{\frac{u}{2} \cdot \left(\frac{u}{2} - s\right) \cdot \left(\frac{u}{2} - s\right) \cdot \left(\frac{u}{2} - \overline{DE}\right)} \\
F_{DES} &= \sqrt{7,6 \cdot (7,6-6) \cdot (7,6-6) \cdot (7,6-3,2)} \\
F_{DES} &= \sqrt{7,6 \cdot 1,6 \cdot 1,6 \cdot 4,4} \\
F_{DES} &= \sqrt{85,6} \\
F_{DES} &\approx 9,25
\end{aligned}
$$

eine Fläche von ungefähr 9,25 $\text{m}^2$.
Die gesamte Dachfläche beträgt also $F_{\text{Dach}} = 2 \cdot F_{CDS} + 2 \cdot F_{DES} = 2 \cdot 15,6 + 2 \cdot 9,25 \approx 49,7\ \text{m}^2$. Mit 10% Verschnitt werden $1,1 \cdot 49,7\ \text{m}^2 \approx 54,67\ \text{m}^2$ Blech benötigt.
Ohne gerundete Zwischenergebnisse ist die Dachfläche $50,158\ \text{m}^2$.

## Mathematik 2

**Aufgabe 1:** (9 Punkte)

Gegeben sind die Punkte $P(-5|3),\ Q(3|-2)$ und $R(5|1)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.

1.1 Berechnen Sie Steigung und Gleichung der Geraden $g$ durch $P$ und $Q$.

1.2 Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden $g$ mit den Koordinatenachsen.

1.3 Geben Sie die Gleichung der Geraden $h$ an, die durch $R$ verläuft und senkrecht zu $g$ ist.

1.4 Geben Sie die Gleichung der Geraden $t$ an, die durch $R$ verläuft und parallel zur $x$-Achse ist.

---

1.1 Die Steigung oder Steilheit einer Straße oder Geraden besagt um wieviel sich die Höhe ($y$-Richtung) je Strecke ($x$-Richtung) ändert. Eine Straße die auf 100 Metern Strecke in der Horizontalen um einem Meter nach oben in die Vertikale führt hat eine Steigung von $\frac{1 \text{ Meter}}{100 \text{ Meter}} = 0,01 = 1\%$.
Die Gerade von $P$ nach $Q$ geht in $x$-Richtung von $-5$ nach 3 und in $y$-Richtung von 3 nach $-2$. Die Strecke in $x$-Richtung ($\Delta x$) ist also $2 - (-5) = 2 + 5 = 8$ und in $y$-Richtung $\Delta y = -2 - 3 = -5$. Die Steigung $m$ ist

$$\frac{\text{Änderung in } y\text{-Richtung}}{\text{Änderung in } x\text{-Richtung}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{8} = -0,625.$$

Um die Gleichung der Geraden in der Form $y = m \cdot x + b$ anzugeben braucht man noch den Schnittpunkt der Geraden mit der $y$-Achse, den $y$-Achsenabschnitt mit der Bezeichnung $b$. Die Gerade schneidet die $y$-Achse wenn $x$ den Wert 0 hat, $b$ hat also die Koordinaten $(0|b)$. Um $b$ zu berechnen geht man von einem der bekannten Punkte solange auf der Geraden bis $x$ Null ist, man ist dann am Punkt $(0|b)$. Ob man die dabei zurücklegte Höhe zur Höhe des Ausgangspunktes addiert oder subtrahiert hängt davon ab ob die Steigung der Geraden positiv oder negativ ist, und ob der Ausgangspunkt rechts oder links in $x$-Richtung vom Zielpunkt liegt. Weil für den $y$-Achsenabschnitt der Zielpunkt, der Schnittpunkt mit der $y$-Achse, auf der $y$-Achse liegt kann man die Entscheidung in vier Fälle aufteilen:

| | Ausgangspunkt links $y$-Achse | Ausgangspunkt rechts $y$-Achse |
|---|---|---|
| Geradensteigung positiv | $+$ | $-$ |
| Geradensteigung negativ | $-$ | $+$ |

Man kann also sagen: Wenn die Vorzeichen von $x$-Wert des Ausgangspunktes und der Geradensteigung gleich sind, dann wird die Höhe subtrahiert. In allen anderen Fällen addiert.
Hier muss man von $P$ um 5 in positiver $x$-Richtung gehen. Die dabei zurückgelegte Höhe ist

$$\text{Steigung der Geraden} \cdot \text{Länge in } x\text{-Richtung} = -\frac{5}{8} \cdot 5 = -\frac{25}{8} = -3,125.$$

$b$ ist die Höhe des Ausgangspunktes $P$ minus (weil der $x$-Wert von $P$ und die Steigung $m$ negativ sind) der zurückgelegten Höhe bis zum $y$-Achsenschnittpunkt, hier: $3 - 3,125 = 0,125 = -\frac{1}{8}$. Die Geradengleichung lautet also $y = -\frac{5}{8} \cdot x - \frac{1}{8}$.

1.2 Der erste der beiden Schnittpunkte ist schon berechnet, es ist der mit der $y$-Achse. Seine Koordinaten sind $(0|b) = (0|0,125)$. Es bleibt der Schnittpunkt mit der $x$-Achse. An diesem Punkt hat $y$ den Wert 0. Wird dieser $y$-Wert in die Geradengleichung eingesetzt und diese nach $x$ gelöst enthält man den gesuchten Schnittpunkt.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{5}{8} \cdot x - \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} &= -\frac{5}{8} \cdot x \\ \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{5} &= -x \\ -\frac{1}{5} &= x \end{aligned}$$

Der $x$-Achsenschnittpunkt hat also die $x$-Koordinate $-\frac{1}{5} = -0,2$, da die $y$-Koordinate Null ist hat der Schnittpunkt die Koordinaten $(-0,2|0)$.

1.3 Weil Gerade $h$ auf $g$ senkrecht steht, lässt sich ihre Steigung $m_h$ berechnen, sie ist der negative Kehrbruch/Kehrwert der Steigung $m_g$ von $g$. In diesem Fall ist

$$m_h = -\frac{1}{m_g} = -\frac{1}{-\frac{5}{8}} = \frac{8}{5}.$$

Für die Geradengleichung fehlt noch der $y$-Achsenabschnitt $b$ wie oben. Geht man vom Startpunkt $R$ um 5 in negative $x$-Richtung erreicht man die $y$-Achse. Die dabei zurückgelegte Höhe (Strecke in $y$-Richtung) ist $-5 \cdot m_h = -5 \cdot \frac{8}{5} = -8$. Zieht man diese Höhe von der Höhe des Startpunktes $R$ ab, so erhält man -7 als Höhe des $y$-Achsenschnittpunkts. Dieser hat die Koordinaten $(0|b) = (0|-7)$. Die Geradengleichung ist also $y = \frac{8}{5} \cdot x - 7$.

1.4 Weil die Gerade $t$ parallel zur $x$-Achse liegt ist ihre Steigung Null. Außerdem verläuft $t$ durch $R$. Weil $t$ parallel zur $x$-Achse liegt, schneidet $t$ die $y$-Achse auf der Höhe von $R$, der $y$-Achsenschnittpunkt hat also die Koordinaten $(0|b) = (0|1)$ wobei in diesem Fall $b$ die $y$-Koordinate von $R$ ist. Die Geradengleichung ist $y = 0 \cdot x + 1$ oder $y = 1$.

**Aufgabe 2:** (2 Punkte)

Die quadratische Funktion $f$ hat als Graph eine Parabel $p$, die durch die Punkte $A(-1|3)$, $B(-3|0)$, $C(7|-5)$ geht.

2.1 Ermitteln Sie den Funktionsterm $f(x)$.

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel $p$.

2.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel $p$ mit der Abszissenachse.

2.4 Zeichnen Sie die Parabel $p$ im Bereich $-4 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein; erstellen Sie dazu eine Wertetabelle mit $\Delta x = 1$.

2.5 Berechnen Sie, für welche Werte von $b$ die Parabel $p$ und die Gerade $g$ mit der Gleichung $y = -x + b$ zwei gemeinsame Punkte haben.

---

2.1 Der allgemeine Funktionsterm einer quadratischen Funktion lautet $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Weil die Punkte $A$, $B$ und $C$ auf der Parabel $p$ liegen, erfüllen/lösen sie jeweils die Funktionsgleichung. Es gibt also für jeden Punkt eine Gleichung mit den noch zu bestimmenden Parametern $a$, $b$ und $c$:

$$\begin{array}{llll} \text{Für } A(-1|3) & f(-1) = 3 & \text{also} & a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 3 \\ \text{Für } B(-3|0) & f(-3) = 0 & \text{also} & a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 0 \\ \text{Für } C(7|-5) & f(7) = -5 & \text{also} & a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c = -5 \end{array}$$

Man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcr} \text{I:} & 1 \cdot a & -1 \cdot b & +1 \cdot c & = & 3 \\ \text{II:} & 9 \cdot a & -3 \cdot b & +1 \cdot c & = & 0 \\ \text{III:} & 49 \cdot a & +7 \cdot b & +1 \cdot c & = & -5 \end{array}$$

das man auch als Matrix schreiben kann.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 9 & -3 & 1 & 0 \\ 49 & 7 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

Mit dem erweiterten Gauß-Algorithmus ist dieses einfach zu lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 9 & -3 & 1 & 0 \\ 49 & 7 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-9\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -8 & -27 \\ 49 & 7 & 1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-49\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -8 & -27 \\ 0 & 56 & -48 & -152 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II:6}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 56 & -48 & -152 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I+II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 56 & -48 & -152 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-56\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{80}{3} & 100 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}\cdot\frac{3}{80}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}+\frac{1}{3}\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}+\frac{4}{3}\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{4} \end{array}\right)$$

Die Parameter $a$, $b$ und $c$ können aus der rechten Spalte abgelesen werden. $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ und $c = \frac{15}{4}$. In den allgemeinen Funktionsterm $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ eingesetzt ergibt sich mit $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{15}{4}$ (ohne Brüche: $f(x) = -0,25 \cdot x^2 + 0,5 \cdot x + 3,75$) der Funktionsterm der Parabel $p$.

2.2 Am Scheitelpunkt ist die Steigung der Parabel Null. Die Steigung einer Funktion ist ihre erste Ableitung.

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{15}{4}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$$

Diese Ableitung soll also Null sein, es gilt die Gleichung $-\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} = 0$ zu lösen.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} &= 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot x &= -\frac{1}{2} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Der $x$-Koordinate des Scheitelpunkts ist also 1. Dieser Wert wird in den Funktionsterm eingesetzt und liefert die $y$-Koordinate:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{15}{4} \\ y &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{15}{4} \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $(1|4)$.

2.3 Die Parabel schneidet die $x$-Achse, wenn der $y$-Wert Null ist. Der Funktionsterm wird mit Null gleichgesetzt und mit Hilfe der Mitternachtsformel nach $x$ gelöst:

$$0 = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{15}{4}$$

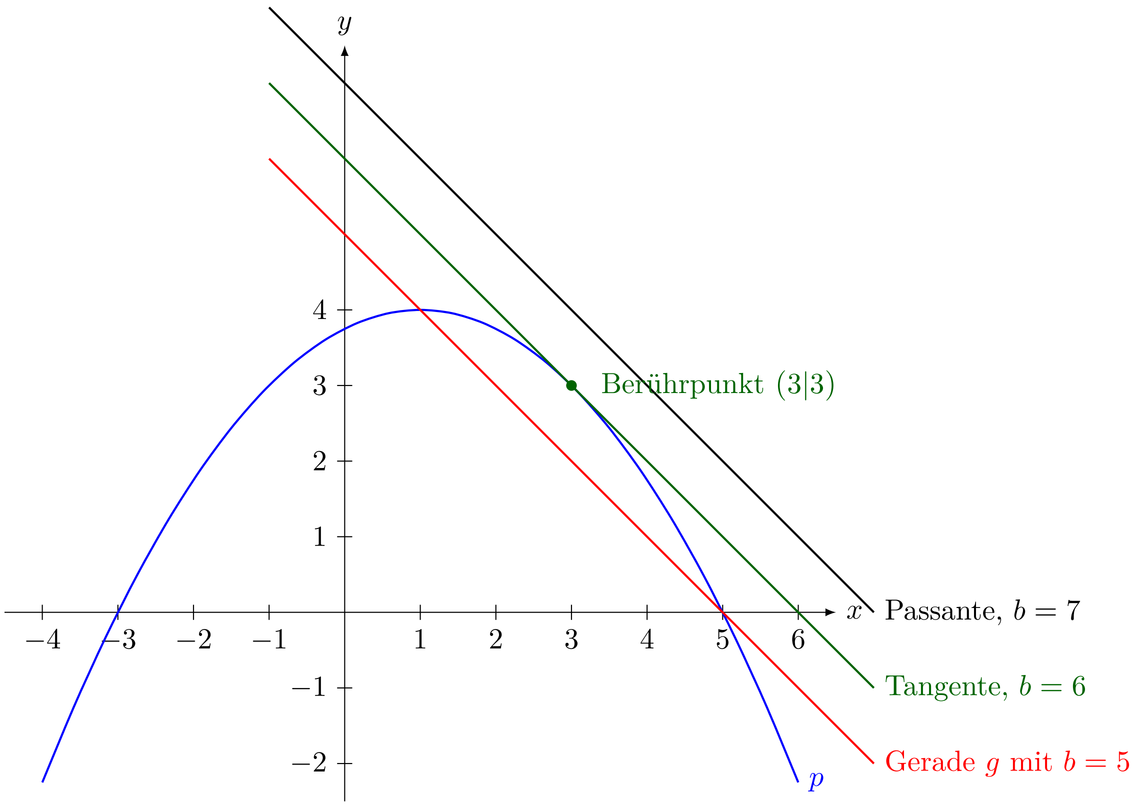
$a = -\frac{1}{4},\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{15}{4}$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot \frac{15}{4}}}{2 \cdot (-\frac{1}{4})} \\ x_{1,2} &= \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{15}{4}}}{-\frac{1}{2}} \\ x_{1,2} &= \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4}}}{-\frac{1}{2}} \\ x_{1,2} &= \frac{-\frac{1}{2} \pm 2}{-\frac{1}{2}} \\ x_{1,2} &= 1 \pm 4 \end{aligned}$$

Damit sind die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -3$. Die Schnittpunkte sind also $(5|0)$ und $(-3|0)$.

2.4 Wertetabelle durch einsetzen der $x$-Werte in den Funktionsterm:

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\frac{9}{4}$ | $0$ | $\frac{7}{4}$ | $3$ | $\frac{15}{4}$ | $4$ | $\frac{15}{4}$ | $3$ | $\frac{7}{4}$ | $0$ | $-\frac{9}{4}$ |




2.5 Die Gerade $g$ mit der Geradengleichung $y = -x + b$ hat die Steigung -1. Mit dem Parameter $b$ wird die Gerade in $y$-Richtung verschoben. Ziel ist es alle $b$ zu finden, dank derer die Gerade so liegt, dass sie die Parabel zweimal schneidet. Liegt die Gerade oberhalb von der Parabel, so geht sie an ihr vorbei ohne sie zu schneiden (Passante). Liegt die Gerade so, dass die die Parabel berührt, mit ihr also einen einzigen Punkt gemeinsam hat, so nennt man sie Tangente. Wird die Gerade noch weiter nach unten, in negative $y$-Richtung, verschoben, so schneidet sie die Parabel zweimal. Die Grenze zwischen keinem und zwei Schnittpunkten ist also die Tangente. Eine Tangente die den Graphen einer Funktion berührt hat in diesem Punkt die gleiche Steigung wie die Funktion. Oder: In diesem Punkt haben Tangente und Funktion die gleiche Steigung. Die Gerade hat eine konstante Steigung von -1, gesucht ist nun der Punkt der Funktion, der ebenfalls die Steigung -1 hat. Das geht ähnlich wie bei der Suche nach dem Scheitelpunkt. Die Steigung einer Funktion ist ihre erste Ableitung.

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{15}{4} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Diese Ableitung soll jetzt -1 sein, es gilt die Gleichung $-\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} = -1$ zu lösen.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} &= -1 \\ -\frac{1}{2} \cdot x &= -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot x &= \frac{3}{2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Damit ist die $x$-Koordinate des Berührpunktes gefunden, einsetzen in den Funktionsterm (oder Nachgucken in der Wertetabelle oben) liefert auch die $y$-Koordinate:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{15}{4} \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Der Berührpunkt ist also $(3|3)$. Dieser Punkt ist nun der Startpunkt von dem aus der $y$-Achsenabschnitt der Gerade bestimmt wird. Man geht von ihm aus um 3 in negative $x$-Achsenrichtung, die dabei zurückgelegte Höhe ist $-3 \cdot (-1) = 3$. Addiert (weil die Geradensteigung -1 negativ aber der $x$-Wert 3 des Berührpunktes positiv ist) man sie zur Höhe des Startpunktes erhält man den $y$-Achsenabschnitt. Hier ist $b = 3 + 3 = 6$. Weil aber bei diesem $b$ Gerade und Parabel nur einen Punkt gemeinsam haben zählt er nicht zu den gesuchten Werten für $b$. Alle gesuchten Werte von $b$ für die Gerade und Parabel zwei gemeinsame (Schnitt-) Punkte haben liegen unterhalb, $b < 6,\ b = (-\infty, 6)$.

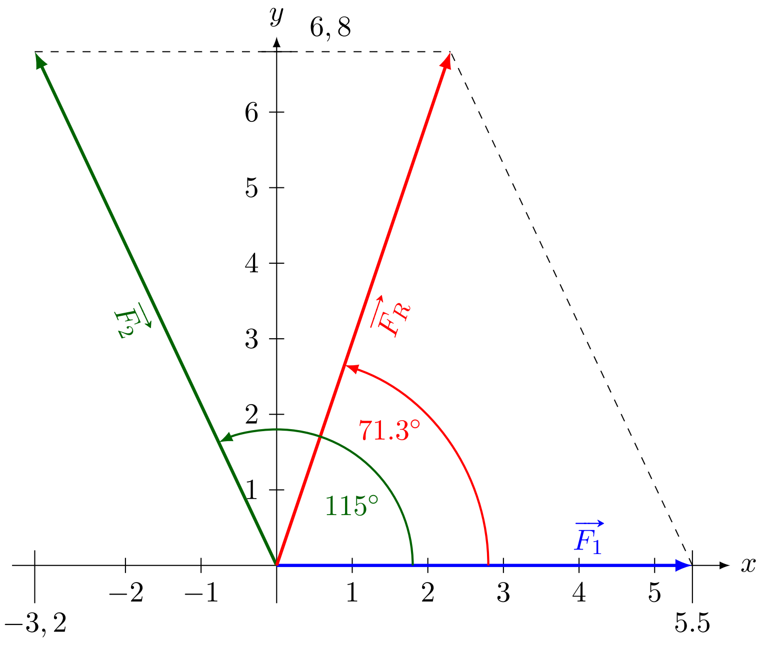
**Aufgabe 3:** (5 Punkte)

Zwei Kräfte mit den Beträgen $F_1 = 5,5$ kN und $F_2 = 7,5$ kN greifen am gleichen Punkt an und schließen einen Winkel von 115° ein.
Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie die Resultierende $F_R$ sowie den Winkel zwischen $F_1$ und $F_R$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Die beiden Kräfte können als Polarkoordinaten (Länge|Winkel) aufgefasst werden, die dann in kartesische Koordinaten transformiert werden. Um es einfach zu gestalten kann man eine der beiden Kräfte gleich auf die $x$-Achse legen, sie hat dann den Winkel 0°. Hier wird $F_1$ entlang der $x$-Achse gelegt wobei eine Längeneinheit einem kN entspricht, ihre kartesischen Koordinaten sind damit $(5,5|0)$.
$F_2$ hat folglich die Polarkoordinaten $(7,5|115°)$. In kartesische Koordinaten umrechnen:
$x = \cos(115°) \cdot 7,5 \approx -3,2$ und $y = \sin(115°) \cdot 7,5 \approx 6,8$ daraus folgen die Koordinaten $(-3,2|6,8)$. Um die Resultierende zu erhalten werden beide Vektoren/Kräfte addiert: $F_R = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3,2 \\ 6,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,3 \\ 6,8 \end{pmatrix}$
Der Gesuchte Winkel zwischen $F_R$ und $F_1$ ist der gleiche Winkel wie zwischen $F_R$ und $x$-Achse. Es ist also nur der Winkel des Vektors $F_R$ zu berechnen. Aus

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \text{ folgt } \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ einsetzen } \varphi = \arctan\left(\frac{6,8}{2,3}\right) \approx 71,3°$$




**Aufgabe 4:** (6 Punkte)

Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Menge der reellen Zahlen:

$$x^5 - 5,25 \cdot x^3 - 6,25 \cdot x = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Die Herangehensweise für solche Gleichungen ist die Polynomdivision, dazu braucht man jedoch eine Nullstelle/Lösung. Die triviale Lösung ist Null, denn für $x = 0$ ist die Aussage wahr. Man kann $x$ ausklammern und erhält

$$x \cdot (x^4 - 5,25 \cdot x^2 - 6,25) = 0.$$

Hier sind keine weiteren Nullstellen offensichtlich, es bietet sich jedoch die Substitution von $x^2$ an, mit $z = x^2$ erhält man die quadratische Gleichung

$$x \cdot (z^2 - 5,25 \cdot z - 6,25) = 0$$

die mit der Mitternachtsformel gelöst werden kann. Mit $a = 1,\ b = -5,25$ und $c = -6,25$ folgt

$$z_{1,2} = \frac{5,25 \pm \sqrt{(-5,25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6,25)}}{2 \cdot 1}$$
$$z_{1,2} = \frac{5,25 \pm \sqrt{52,5625}}{2}$$
$$z_{1,2} = \frac{5,25 \pm 7,25}{2} \text{ also } z_1 = 6,25 \text{ und } z_2 = -1$$

Die Gleichung kann man jetzt schreiben als $x \cdot (z + 1) \cdot (z - 6,25) = 0$. Macht man die Substitution rückgängig erhält man $x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 6,25) = 0$. Die Bestandteile $(x^2 + 1)$ und $(x^2 - 6,25)$ sind jeweils binomische Formeln, wobei $(x^2 + 1) = 0$ keine reellen Nullstellen besitzt. Ihre beiden komplexen Nullstellen sind $i$ und $-i$. Die Gleichung $(x^2 - 6,25) = 0$ liefert mit $\pm\sqrt{6,25}$ die beiden reellen Nullstellen $2,5$ und $-2,5$. Die Lösungsmenge der Gleichung über der Menge der reellen Zahlen ist also $L = \{0,\ 2,5,\ -2,5\}$.